TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE.

PARIS — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

PAR J. ADHÉMAR.

GÉOMÉTRIE PLANE.





PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V^{OR} DALMONT,
Libraires, quai des Augustins, 39 et 41.
MATHIAS, Libraire, quai Malaquais, 15.
BACHELIER, Libraire, quai des Augustins, 55.

1843

GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

I.

1. Les objets tels qu'ils existent dans la nature, et ceux qui sont le produit de notre industrie, se nomment des *corps* ou *solides;* ainsi, un morceau de bois, une barre de fer, un arbre, une pierre, sont des corps.

2. L'espace occupé par un corps, est limité de toutes parts; mais l'espace en général doit être considéré comme *infini.*

3. La partie de l'espace, occupée par un corps, se nomme son *volume*, et la limite de ce volume se nomme *surface.* Ainsi, la surface d'un corps sépare son volume de l'espace qui l'environne.

4. On donne encore le nom de surface à la limite qui, dans notre imagination, sépare deux parties voisines de

l'espace, sans qu'il soit nécessaire de supposer ces parties occupées par des corps.

5. La limite qui sépare deux parties voisines d'une surface se nomme une *ligne*.

6. Le lieu de l'espace suivant lequel deux surfaces *se rencontrent*, est une ligne.

7. La direction, suivant laquelle on estime l'étendue, se nomme une *dimension*.

8. Toutes les questions relatives aux propriétés de l'espace, peuvent être résolues en ne considérant que trois directions principales, que l'on nomme *les dimensions de l'étendue*, et que l'on désigne par les mots, *longueur*, *largeur* et *profondeur*. Cette dernière dimension est quelquefois nommée *hauteur* ou *épaisseur*.

9. La GÉOMÉTRIE a principalement pour but la recherche des relations qui existent entre les trois dimensions de l'étendue.

10. Un corps ou solide est étendu suivant trois dimensions, savoir : *longueur*, *largeur*, *épaisseur*.

11. Une surface, n'a que deux dimensions : *longueur* et *largeur*.

12. Une ligne n'a qu'une dimension, que l'on nomme *longueur*.

13. Dans les corps ou solides, aucune des trois dimensions ne peut exister sans les deux autres, mais il est souvent utile de les considérer *séparément*; c'est ce qu'on appelle faire des *abstractions*.

Supposons, par exemple, que l'on veuille peindre la façade d'une maison, il est évident que pour calculer la quantité de couleur qui doit être employée, il ne sera pas nécessaire de connaître l'*épaisseur* des murs; on pourra donc *négliger* cette dimension pour ne s'occuper que de l'étendue en *surface*.

Lorsqu'un homme doit entreprendre un voyage, il s'occupe principalement de la *longueur* de la route qu'il doit parcourir, et ne s'inquiète pas de la largeur de cette route ou de l'épaisseur du pavé, il fait donc abstraction de la *largeur* et de l'*épaisseur*.

C'est ainsi que, souvent, l'on néglige quelques-unes des dimensions de l'étendue, pour ne s'occuper que de celles qui se rapportent à la question proposée.

II.

14. Indépendamment de l'*étendue finie* occupée par les corps, il est souvent utile d'étudier les propriétés de l'*étendue infinie* qui les entoure. De nouvelles définitions deviennent nécessaires pour atteindre ce but.

15. Quelque petit que soit un corps, il possède toujours les trois dimensions de l'étendue. Ainsi un grain de sable, un grain de poussière, sont étendus en longueur, largeur et épaisseur.

Si, par la pensée, nous supposons que ce corps diminue de volume, chacune de ses dimensions diminuera.

A mesure que les dimensions diminuent, le volume devient plus petit, et lorsque les trois dimensions sont réduites à zéro, le volume devient nul et le corps est réduit à un point.

16. On peut donc considérer le point comme la *limite* à laquelle parvient le volume d'un corps lorsque ses dimensions deviennent *infiniment petites*.

17. *Le* **point** *n'a donc pas d'étendue*. Le corps le plus petit que l'on puisse concevoir, est toujours *plus grand qu'un point*. Enfin, le point est le résultat auquel on parvient en faisant *abstraction* des trois dimensions de

l'étendue ; c'est une conception géométrique qui ne peut exister que dans notre imagination.

18. Si l'on suppose qu'un point se meut d'une manière quelconque dans l'espace, le chemin qu'il aura parcouru sera une *ligne*.

19. Le point n'ayant pas d'étendue, il s'ensuit que la ligne *ne peut avoir ni largeur ni épaisseur*, elle n'a qu'une dimension nommée *longueur*, qui représente la route parcourue par le point mobile.

20. Si le point générateur se détourne un peu à chaque instant, la ligne engendrée est une *courbe;* dans le cas contraire c'est une ligne droite.

21. On peut considérer la ligne droite comme la trace d'un point qui se meut de manière à se diriger toujours vers un seul et même point; par conséquent *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

22. Cette définition comprend le cas où les deux points dont il s'agit seraient *infiniment éloignés.* Alors, la droite qui joint ces points est elle-même *infiniment longue.*

La ligne droite peut donc être considérée de deux manières entièrement différentes :

1° Elle est *finie* lorsqu'elle représente *une distance ;*

2° Elle est *infinie* lorsqu'elle exprime une *direction.*

Il est plus exact de dire que *toutes les lignes droites sont infinies*, sauf à ne considérer dans chaque question que la portion de ligne droite dont on aura besoin. Ainsi,

23. *La* **droite** *est une ligne infinie, telle que la partie de cette ligne comprise entre deux quelconques de ses points, est plus courte que toute autre ligne qui joindrait l'un de ces points à l'autre.*

Il résulte de cette définition :

1° Que par deux points donnés on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite;

2° Que par conséquent *deux points donnés déterminent la position d'une droite.*

24. Lorsque deux lignes passent par un même point, on dit qu'elles *se rencontrent* ou qu'elles *se coupent*, et le point commun se nomme leur *intersection.*

25. Si deux lignes droites se rencontrent, et que l'on fasse mouvoir une troisième droite de manière qu'elle coupe toujours les deux premières, le lieu de l'espace qui contient toutes les positions de la droite mobile se nomme un *plan*, donc :

26. *Le* **plan** *est le lieu qui contient toutes les positions que peut prendre une droite assujettie à s'appuyer constamment sur deux droites immobiles qui se rencontrent.*

La droite mobile se nomme *génératrice*, et les deux droites sur lesquelles elle s'appuie se nomment *directrices.*

27. Ces deux dernières lignes étant données, il est évident que la position du plan sera connue. C'est pourquoi on dit que *deux lignes qui se coupent déterminent la position du plan.*

Trois points déterminent aussi la position d'un plan, puisqu'en joignant ces points *deux à deux*, par trois droites, on pourrait toujours considérer deux quelconques de ces droites comme directrices du plan.

28. Il résulte encore de la définition précédente, qu'*un plan est une surface sur laquelle une ligne droite peut être appliquée dans tous les sens.*

Par conséquent une ligne droite ne peut être en partie dans un plan et en partie en dehors de ce plan.

29. La ligne droite étant *infinie*, il s'ensuit que tous les plans sont essentiellement *infinis.*

30. La ligne droite n'est infinie qu'en *longueur*, tandis que le plan est infini en *longueur* et *largeur*.

31. Toute combinaison de lignes tracées dans un plan est une *figure plane*.

32. Lorsque les quantités que l'on considère sont toutes comprises dans un même plan, on dit que la question appartient à la *géométrie plane ou à deux dimensions*. Dans le cas contraire elle dépend de la *géométrie à trois dimensions ou dans l'espace*.

33. Nous allons commencer par étudier les questions qui dépendent de la géométrie plane. Mais, avant de passer aux démonstrations des principes, je dois donner l'explication de quelques termes employés dans le langage géométrique.

III.

34. **Axiome** est une vérité tellement évidente qu'elle n'a pas besoin de démonstration.

35. **Théorème** est une vérité qui ne devient évidente qu'au moyen d'une démonstration.

36. **Corollaire** est une vérité qui résulte si évidemment d'une autre vérité que l'on vient d'établir, qu'elle n'a pas besoin d'une démonstration particulière.

L'ensemble des axiomes, théorèmes et corollaires, compose ce qu'on appelle la *théorie*.

37. **Problème** est une question à résoudre, c'est une application de la théorie.

38. **Hypothèse** est une supposition faite, soit dans l'énoncé d'un théorème, soit dans le courant de la démonstration.

39. **Réciproque** est l'inverse d'une proposition précédemment énoncée, c'est-à-dire que la conséquence est

admise comme *hypothèse*, tandis que l'hypothèse à son tour devient la conséquence.

40. **Notation.** Les signes employés sont les mêmes que dans l'algèbre, et se prononcent de la même manière.

41. Les lettres majuscules placées sur les figures, représentent des extrémités ou des intersections de lignes, et n'ont par conséquent aucune valeur par elles-mêmes.

Pour désigner la droite qui joint deux points A et B on écrit AB, ce qui par conséquent ne signifie pas, comme dans l'algèbre, le produit de A par B.

Pour exprimer le carré dont le côté est AB, on écrira $\overline{AB}^2$, et, dans ce cas, la barre qui précède l'exposant 2 ne doit pas être prise pour le signe *moins*.

Dans les formules, on emploie les petites lettres pour exprimer les *quantités*. Ainsi, on représentera souvent par une petite lettre la *longueur* de la portion de ligne droite comprise entre deux points.

42. Le nombre placé en tête, et du côté opposé au numéro de chaque page, indique la planche. Les numéros des figures sont indiqués dans le texte, et les nombres placés seuls, entre parenthèses, sont des renvois aux articles.

Le numéro de chaque article est au commencement de l'alinéa.

IV.

Axiomes.

43. *Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.*

44. *Le tout est plus grand que chacune de ses parties.*

45. *Le tout est égal à la somme de ses parties.*

46. *Deux figures sont égales, lorsqu'en plaçant l'une d'elles sur l'autre, elles se confondent dans tous leurs points. On dit alors qu'elles coïncident.*

47. *Lorsqu'une quantité ne peut être ni plus grande ni plus petite qu'une autre quantité, elle lui est nécessairement égale.*

Lorsque la première quantité ne peut être égale à la seconde ni plus grande qu'elle, elle est plus petite.

Enfin, si la première quantité ne peut être égale à la seconde, ni plus petite qu'elle, elle est plus grande.

48. *Une hypothèse est fausse lorsque sa conséquence est absurde.*

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

POSITION RELATIVE DES LIGNES ET COMPARAISON DES FIGURES.





CHAPITRE PREMIER.

Angles. — Perpendiculaires. — Obliques.

I.

49. **Définitions**. Si nous supposons que deux droites AB, AC, *fig.* 1re, Pl. I, aboutissent à un même point A, et que l'on fasse tourner la droite AB en la faisant successivement passer par toutes les positions AB′, AB″, AB‴, etc., la quantité plus ou moins grande dont cette droite mobile aura tourné pour s'écarter de l'autre droite sera un *angle*. Le point A est le *sommet* de l'angle, et les deux droites AB‴, AC, en sont les *côtés*.

La grandeur d'un angle est indépendante de la longueur des côtés, que l'on doit toujours considérer comme *infinis*.

50. On désigne un angle par la lettre du sommet et par deux autres lettres placées sur les côtés, en ayant le

soin de mettre la lettre du sommet entre les deux autres. Ainsi, l'angle BAC est compris entre les deux lignes BA et AC, tandis que l'angle B'AC est formé par les droites B'A, AC.

Lorsqu'il y a plusieurs lettres sur les côtés de l'angle, il vaut mieux choisir celles qui sont le plus rapprochées du sommet.

Lorsqu'il n'y a point d'autre angle à côté de celui que l'on veut désigner, on se contente quelquefois d'énoncer la lettre du sommet seulement.

Quelquefois aussi on emploie une petite lettre, qui, dans ce cas, doit être placée entre les côtés. Ainsi l'on aurait : angle m = BAC; angle n = B'AB.

51. Les lignes droites, considérées d'une manière générale, étant infinies, il en résulte que toutes les fois que deux droites se coupent, elles forment *quatre angles*, *fig.* 2.

52. Les deux angles d'un même côté par rapport à l'une quelconque des deux droites, se nomment *angles adjacents*. Ainsi, les angles EAB, BAD, sont des angles adjacents.

Il en est de même des angles BAD, DAC.

53. Les angles BAD, EAC, sont des angles *opposés par le sommet*, ainsi que les angles EAB, CAD.

54. Si les angles formés par deux droites qui se coupent, *fig.* 3, sont égaux, on leur donne le nom d'*angles droits*, et les lignes qui forment les côtés de ces angles, sont dites *perpendiculaires* l'une à l'autre.

Ainsi, AB est perpendiculaire sur CD, et réciproquement CD est perpendiculaire sur AB.

55. Tout angle plus petit qu'un angle droit est un angle *aigu*. Ainsi, l'angle DBC, *fig.* 5, est un angle aigu.

56. Tout angle plus grand qu'un angle droit est un angle *obtus*. L'angle ABD est un angle obtus.

57. Le *complément* d'un angle est sa différence avec un angle droit : l'angle EBD est le complément de DBC, et par la même raison, l'angle DBC est le complément de EBD.

58. On nomme ligne *oblique* celle qui fait des angles inégaux avec une autre. Ainsi, chacune des deux droites BC, ED, *fig.* 2, est oblique par rapport à l'autre.

II.

59. **Théorème.** *Les angles droits sont tous égaux entre eux.*

Démonstration. Si l'on transporte la *fig.* 3 sur la *fig.* 4, en plaçant la droite CD sur PQ, et faisant coïncider le point E avec F, il est évident que la perpendiculaire AB doit se confondre avec la perpendiculaire MN ; car, supposons, pour un instant, que AB, prenne une position telle que VS, on aurait l'angle droit PFV plus grand que l'angle droit VFQ, ce qui serait contraire à la définition du n° 54.

III.

60. **Théorème.** *Fig.* 5. *Lorsqu'une ligne droite* DB *vient aboutir en un point d'une autre droite* AC, *elle fait avec celle-ci deux angles adjacents*, ABD, DBC, *dont la somme est égale à deux angles droits.*

Démonstration. Concevons la droite BE perpendiculaire sur AC, on aura :

l'angle obtus ABD $=$ 1 *angle droit* $+$ EBD,
l'angle aigu DBC $=$ 1 *angle droit* $-$ EBD.

Ajoutant et réduisant il viendra :

ABD $+$ DBC $=$ 2 *angles droits*.

61. **Corollaire** I. Le *supplément* d'un angle est sa différence avec deux angles droits. Par conséquent l'angle ABD est le supplément de DBC, et l'angle DBC est le supplément de ABD.

Si l'un des deux angles est droit, son supplément le sera pareillement.

62. **Cor.** II. *Fig.* 6. *Tous les angles consécutifs* ABO, OBH, HBI, etc., *formés au point* B, *et d'un même côté de la droite* AC, *valent ensemble deux angles droits, quel que soit leur nombre ;* car leur somme est égale à celle des deux angles droits ABD, DBC.

63. **Cor.** III. *Fig.* 7. *Tous les angles formés autour d'un point* A, *valent ensemble quatre angles droits, quel que soit leur nombre ;* car leur somme est égale à celle des quatre angles droits formés par les deux droites BC, DE.

IV.

64. **Théorème.** *Fig.* 8. *Si deux angles adjacents* ABC, CBD, *valent ensemble deux angles droits, les côtés extérieurs* AB, BD, *seront en ligne droite.*

Démonstration. Supposons que BE soit le prolongement de AB, on aurait alors (60) :

$$ABC + CBE = 2 \text{ angles droits.}$$

Mais on a par l'énoncé :

$$ABC + CBD = 2 \text{ angles droits.}$$

Retranchant la seconde équation de la première, et faisant la réduction, on aurait :

$$CBE - CBD = 0;$$

d'où $$CBE = CBD,$$

c'est-à-dire que la partie serait égale au tout, ce qui est *absurde* (44). Par conséquent (48) le prolongement de AB, ne peut pas être situé *au-dessous* de BD ; on démontrerait

de la même manière qu'il ne peut pas être *au dessus*; il faut donc que ce prolongement soit BD.

V.

65. **Théorème.** *Lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux.*

Démonstration. *Fig.* 2. La ligne ED étant droite, on a (60) : EAB + BAD = 2 *angles droits.*

La ligne BC étant droite, on a :

CAD + BAD = 2 *angles droits*

Retranchant l'une des équations de l'autre et réduisant, on a : EAB — CAD = 0;

d'où EAB = CAD.

On démontrerait de même que l'angle BAD = EAC.

66. **Corollaire.** *Si l'un des quatre angles est droit*, fig. 3, *les trois autres le seront également.*

Parallèles.

VI.

67. **Définitions.** *Fig.* 9. Si deux droites AB, AC, sont rencontrées par une troisième droite BC, les intersections de ces droites, deux à deux, déterminent *trois points* A, B, C, dont chacun est le sommet commun à quatre angles.

68. Si l'on fait tourner la droite AC, *fig.* 10, autour du point A, et qu'on lui fasse prendre les positions AC′, AC″, AC‴, le point d'intersection de la droite mobile avec BC, glissera sur cette dernière ligne en s'éloignant du point B.

Par suite de ce mouvement, l'angle CAB passant par tous les états de grandeurs, deviendra successivement C′AB, C″AB, etc., et lorsqu'on aura l'angle C‴AB égal à l'angle

C″BF, les deux droites C‴A, C″B, seront *parallèles*. Ainsi,

69. *deux droites sont* **parallèles** *lorsqu'en les coupant par une troisième droite, à laquelle on donne le nom de* sécante, *elles sont également inclinées et du même côté par rapport à cette dernière ligne.*

70. Les droites AC‴, BC″, étant infinies (23); elles n'ont pas dû cesser de se rencontrer, jusqu'au moment où la droite mobile est arrivée dans la position AC‴. Ainsi, le point d'intersection, s'est éloigné jusqu'à l'*infini*. C'est pourquoi on considère souvent les parallèles comme des droites qui *se rencontrent infiniment loin*. Ce qui, au surplus, revient à dire qu'elles ne *se rencontrent pas*.

71. La droite mobile AC s'appuyant toujours sur les deux droites AB, BC″, il en résulte que ces trois lignes sont dans un même plan (25).

Ce plan peut être engendré par la ligne EF glissant sur les deux droites AC‴, BC″, qui alors seraient *les directrices du plan.*

72. Il résulte de là que *deux parallèles déterminent la position d'un plan.*

73. Si, après le moment où la droite mobile AC est parvenu dans la position AC‴, on continue à la faire tourner dans le même sens, le point d'intersection se reporte sur le prolongement de BC^{v}.

74. En général, lorsque deux droites, situées dans un même plan, *ne sont pas parallèles, on peut toujours admettre qu'elles se rencontrent.*

VII.

75. **Définitions.** La combinaison de deux lignes parallèles coupées par une sécante, établit entre ces trois lignes des relations importantes qu'il faut étudier avec beaucoup d'attention.

Nous remarquerons d'abord que parmi les *huit angles* formés autour des deux points A et B, *fig.* 11, il y a *quatre angles aigus* et *quatre obtus*.

On est convenu, pour abréger le discours, de donner à ces angles des noms qui rappellent leur *position relative.* Ainsi :

76. Les angles CAB, DBF, se nomment angles *correspondants* ou *internes-externes*, ils doivent être situés :

1° D'un même côté de la sécante;

2° L'un entre les parallèles, et l'autre en dehors ;

3° Ils ne doivent pas être adjacents (52).

Les angles CAE, DBA, sont internes-externes.

Il en est de même des angles BAG, FBH,

et des angles EAG, ABH.

77. Deux angles, tels que CAB, ABH, se nomment *alternes-internes ;* il faut :

1° Qu'ils soient situés de différents côtés de la sécante ;

2° Qu'ils aient tous deux leurs ouvertures dirigées entre les parallèles ;

3° Qu'ils ne soient pas adjacents.

Les angles GAB, ABD sont alternes-internes.

78. Deux angles tels que EAC, FBH, se nomment *alternes-externes ;* ils doivent être situés :

1° De différents côtés de la sécante ;

2° Tous deux en dehors des parallèles ;

3° Ils ne doivent pas être adjacents.

Les angles DBF, EAG, sont alternes-externes.

VIII.

79. **Théorème**. *Si l'on compare, deux à deux, les huit angles formés autour des points* A *et* B, *fig.* 11, *on reconnaîtra :*

1° *Que les quatre angles aigus sont égaux entre eux ;*
2° *Que les quatre angles obtus sont égaux entre eux.*

Démonstration. On a :
CAB = DBF, par la définition des parallèles (69),
DBF = ABH, comme opposés par le sommet (65),
ABH = EAG, par la définition des parallèles.
On démontrerait de même l'égalité des angles obtus.

80. **Corollaire.** On conclura de ce qui précède :
1° *Que deux angles internes-externes sont égaux ;*
2° *Que deux angles alternes-internes sont égaux ;*
3° *Que deux angles alternes externes sont égaux.*

IX.

81. **Théorème.** *Fig.* 11. *Lorsque deux lignes sont parallèles, la somme des angles intérieurs d'un même côté de la sécante vaut deux angles droits.*

Démonstration. On a, par la définition des parallèles :

$$CAB = DBF ;$$

mais on sait (60) que

$$ABD + DBF = 2 \textit{ angles droits.}$$

Ajoutant ces équations et réduisant on aura :

$$CAB + ABD = 2 \textit{ angles droits.}$$

82. **Corollaire.** On démontrerait de même que *les angles* EAC + DBF, *valent ensemble deux angles droits.*

X.

83. **Théorème.** *Fig.* 12. *Si deux droites* AC, BD, *sont perpendiculaires à une troisième droite* EF, *elles seront parallèles.*

Démonstration. Les angles CAB, DBF, sont égaux comme angles droits (59), par conséquent les droites CA,

BD, sont parallèles puisqu'elles font des angles égaux avec la sécante EF (69).

84. **Corollaire.** *Fig.* 13. *Une perpendiculaire* AB et *une oblique* CD, n'étant pas également inclinées sur la sécante, ne sont pas parallèles, et doivent par conséquent *se rencontrer.*

XI.

85. **Théorème.** *Fig.* 12. *Si deux droites* AC, BD, *sont parallèles, toute ligne* EF *perpendiculaire sur l'une d'elles, doit aussi être perpendiculaire sur l'autre.*

Démonstration. Les angles CAB, DBF, étant égaux, par la définition des parallèles, si l'un de ces angles est droit, il faut que le second le soit aussi.

XII.

86. **Théorème.** *Fig.* 14. *Deux droites* AB, CD, *parallèles à une troisième droite* EF, *sont parallèles entre elles.*

Démonstration. Concevons la sécante GU, les deux droites AB, EF étant parallèles, on a :

l'angle GHB = KLF ;

les droites AB, CD, étant parallèles, on a :

l'angle HKD = GHB.

Ajoutant ces équations et réduisant, on obtient :

HKD = KLF,

donc les droites CD, EF, sont parallèles, puisqu'elles font des angles égaux avec GU.

XIII.

87. **Théorème.** *Fig.* 15. *Deux angles* ABO, OEF, *qui ont les côtés parallèles sont égaux.*

Démonstration. On a :

ABO = DOC, comme internes-externes,
DOC = OEF, par la même raison.

Ajoutant et réduisant, on aura : ABO = OEF.

Pour démontrer l'égalité des angles ABO, FEO, *fig.* 16, on dira :

ABO = BOD, comme alternes-internes,
BOD = FEO, comme internes-externes.

Ajoutant on aura : ABO = FEO.

88. **Remarque.** Le théorème qui vient d'être démontré n'est vrai que si les deux angles comparés sont aigus tous les deux, ou tous les deux obtus ; mais, *s'il y avait un angle aigu et un angle obtus, leur somme vaudrait deux angles droits.*

Démonstration. *Fig.* 17. On a :

ABC = EOB, comme internes-externes,
EOB = FEO, comme alternes-internes,
FEO + DEF = 2 *angles droits.*

Ajoutant les trois équations et réduisant, on aura :

ABC + DEF = 2 *angles droits.*

XIV.

89. **Théorème.** *Deux angles* ABC, DEF, *fig.* 18, *sont égaux lorsqu'ils ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun.*

Démonstration. Concevons l'angle GEH, dont les côtés seraient parallèles à ceux de l'angle ABC, et par conséquent perpendiculaires aux côtés correspondants de l'angle DEF, on aura, par le théorème précédent :

ABC = GEH ;

Mais GEH + HEF = 1 *angle droit.*
De plus 1 *angle droit* = HEF + DEF.

Ajoutant et réduisant, on aura :

ABC = DEF.

90. **Remarque.** Si l'un des angles donnés était aigu, et que l'autre fût obtus, leur somme vaudrait *deux angles droits*.

CHAPITRE II.

Polygones.

I.

91. **Définitions.** Le plan est infini (29), mais, souvent, on n'en considère qu'une partie limitée par des lignes.

92. Si la partie de *surface plane* dont il s'agit est entièrement entourée par des lignes droites, on lui donne le nom de *polygone*, *fig.* 1, Pl. 2.

93. Les polygones se distinguent par le nombre de leurs côtés. Le plus simple de tous n'a que trois côtés, et se nomme *triangle*, *fig*. 2.

94. Le polygone de quatre côtés est un *quadrilatère*, *fig*. 3.

95. Celui de cinq côtés est un *pentagone*, *fig*. 4.

96. Celui de six un *hexagone*, *fig*. 1, etc.

97. Lorsqu'un triangle a ses trois côtés inégaux, on le nomme *triangle scalène* ou simplement *triangle*, *fig*. 2.

98. Le triangle *isocèle*, *fig*. 5, est celui qui a deux côtés égaux. Le troisième côté se nomme la *base* du triangle, et le point de rencontre des deux côtés égaux est le *sommet* du triangle.

99. On nomme triangle *équilatéral*, *fig*. 6, celui qui a ses trois côtés égaux.

à l'extérieur, sera égal à la somme des deux angles intérieurs ABC, BAC.

Démonstration. Concevons la droite CD parallèle au côté AB, on aura :

l'angle BCD = ABC, comme alternes-internes,
l'angle DCE = BAC, comme internes-externes.

Faisant la somme de ces deux équations il viendra :

$$BCD + DCE = ABC + BAC,$$

ou

$$BCE = ABC + BAC.$$

III.

111. **Théorème.** *La somme des trois angles d'un triangle est toujours égale à deux angles droits.*

Démonstration. *Fig.* 14, nous avons trouvé, par le théorème précédent :

$$BAC + ABC = BCE,$$

si l'on ajoute de part et d'autre l'angle ACB, il est évident que l'on aura :

$$BAC + ABC + ACB = ACB + BCE = 2 \text{ angles droits } (62).$$

112. **Corollaire** I. Si l'on connaît deux angles d'un triangle, ou seulement leur somme, il suffira de retrancher cette somme de deux angles droits pour avoir le troisième angle.

113. **Cor.** II. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle du premier triangle sera égal au troisième angle du second.

114. **Cor.** III. Il ne peut y avoir *qu'un seul angle droit* dans un triangle, car s'il y en avait deux, il ne resterait plus rien pour le troisième; à plus forte raison, dans un triangle, il ne peut y avoir qu'un seul angle obtus.

115. **Cor.** IV. *Dans un triangle rectangle, la somme*

des deux angles aigus vaut un angle droit ; d'où il résulte que chacun d'eux est le complément de l'autre (57).

IV.

116. **Théorème.** *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Démonstration. *Fig.* 5. Soit AB = AC; concevons la droite AD, qui partage l'angle BAC en deux parties égales, on aura l'angle BAD = DAC ; par conséquent, si l'on plie la figure suivant AD, le côté AB prendra la direction AC ; mais, puisque AB = AC, le point B tombera en C, et le point D n'ayant pas changé de place, les côtés de l'angle B coïncideront avec ceux de l'angle C. D'où l'on pourra conclure que ces deux angles sont égaux.

117. **Corollaire** I. Les deux angles ADB, ADC, sont aussi égaux, puisqu'en pliant la figure, ils coïncident ; de plus, BD est égal à DC, par la même raison, donc : *la droite qui partage en deux parties égales l'angle au sommet d'un triangle isocèle, est perpendiculaire sur la base* (54) *et passe par le milieu de cette base.*

118. **Cor.** II. Si l'on connaît l'angle au sommet d'un triangle isocèle, on pourra le retrancher de deux angles droits, et, prenant la moitié du reste, on aura chacun des angles à la base.

119. **Cor.** III. Si l'on connaît l'un des angles à la base, on le doublera, et, retranchant le résultat de deux angles droits, on aura l'angle du sommet.

120. **Cor.** IV. *Les angles d'un triangle équilatéral sont égaux*, *fig.* 6, comme étant opposés à des côtés égaux (116).

121. **Cor.** V. Les angles d'un triangle équilatéral, *fig.* 6,

étant égaux, chacun d'eux vaut *le tiers de deux angles droits, ou les deux tiers d'un angle droit.*

V.

122. **Théorème.** *La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités dans le nombre des côtés moins deux.*

Démonstration. *Fig.* 4. Si par un point A, pris à volonté dans l'intérieur du polygone, on mène des droites à tous les sommets, le polygone sera partagé en autant de triangles qu'il y a de côtés, et, si l'on exprime le nombre des côtés par n, le nombre des triangles sera également représenté par n.

Or, la somme des angles de chaque triangle étant égale à deux angles droits (111), on aura $2n$ pour la somme des angles de tous les triangles qui composent la figure; mais en retranchant quatre angles droits, qui représentent la somme des angles formés autour du point A (63), il restera $2n - 4$ pour la somme des angles du polygone.

Si l'on exprime cette somme par la lettre s, et que l'on mette le facteur 2 en évidence, on aura : $s = 2\,(n - 2)$.

Corollaire I. Dans un triangle, le nombre des côtés étant trois, on a $s = 2\;(3 - 2) = 2$. Ce qui vérifie la formule.

Dans un quadrilatère on a $s = 2\;(4 - 2) = 2 \times 2 = 4$. Ainsi, la somme des quatre angles d'un quadrilatère vaut toujours *quatre angles droits.*

Dans un pentagone on a $s = 2\;(5 - 2) = 2 \times 3 = 6$.

123. **Remarque.** Pour que le théorème précédent soit applicable au polygone, représenté *fig.* 15, il faut considérer l'angle du point B comme étant égal à la somme des angles ABC, CBH.

L'angle ABH est un angle *rentrant*.

124. **Cor**. II. Dans un polygone régulier, *fig.* 13, tous les angles étant égaux entre eux, on obtiendra chacun de ces angles en divisant leur somme par n. Ainsi, dans un polygone régulier de huit côtés, chaque angle sera égal à

$$\frac{2(8-2)}{8}=\frac{2\times 6}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1 \text{ angle droit plus } \frac{1}{2}.$$

125. Dans un polygone de neuf côtés chaque angle est égal à $\frac{2(9-2)}{9}=\frac{14}{9}=1$ angle droit plus $\frac{5}{9}$.

VI.

126. **Théorème.** *Fig.* 16. *Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone en tournant dans le même sens, la somme des angles extérieurs que l'on aura formés, vaudra toujours quatre angles droits, quel que soit le nombre des côtés du polygone.*

Démonstration. Par un point A, pris où l'on voudra, concevons une parallèle à chacun des côtés du polygone. La somme des angles autour du point A vaudra quatre angles droits, mais chacun de ces angles est égal à l'un des angles extérieurs du polygone (87), donc la somme des angles extérieurs du polygone vaut *quatre angles droits*.

127. **Corollaire** I. Si le polygone proposé avait un angle rentrant, *fig.* 17, il faudrait retrancher le supplément de cet angle au lieu de l'ajouter.

En effet, on a, par le théorème précédent :

$$a+b+c+d+e+h=4 \textit{ angles droits.}$$

Mais (111) $m+n+u=2$ *angles droits.*

De plus (60) 2 *angles droits* $-k=u$.

Ajoutant les trois équations et réduisant, on aura :

$$a+b+c+d+(m+e)+(n+h)-k=4 \textit{ angles droits.}$$

Relations entre les angles et les côtés des polygones.

VII.

128. **Théorème.** *Dans un triangle, si deux angles sont égaux, les côtés opposés seront aussi égaux, et le triangle sera isocèle.*

Démonstration. *Fig.* 5. Soit l'angle B = l'angle C; concevons la droite AD, perpendiculaire sur BC, on aura l'angle ADB = ADC; mais on a par l'énoncé l'angle B = C, donc le troisième angle BAD du triangle ADB sera égal au troisième angle DAC du second triangle (113). Cela étant admis, plions la figure suivant AD, le côté DB prendra la direction DC, et le point B tombera quelque part sur DC; de plus, l'angle BAD étant égal à l'angle DAC, le côté AB prendra la direction de AC et le point B tombera sur AC. Or, le point B devant tomber en même temps sur les deux côtés DC, AC, ne pourra se trouver qu'au point C, suivant lequel ces deux droites se rencontrent, et l'on aura par conséquent AB = AC.

129. **Corollaire.** Le côté BD étant égal à DC, il s'ensuit que *la perpendiculaire abaissée du sommet d'un triangle isocèle sur la base, doit nécessairement passer par le milieu de cette base.*

VIII

130 **Théorème.** *Dans un triangle quelconque, le plus petit côté est toujours opposé au plus petit angle.*

Démonstration. *Fig.* 18. Soit l'angle ABC < ACB; on pourra toujours concevoir, dans l'intérieur de l'angle ACB, une droite CO, telle que l'angle OCB soit égal à OBC. Le

triangle BOC sera isocèle par le théorème précédent, et l'on aura OB = OC.

Mais, la ligne droite étant le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, on aura $AC < AO + OC$.

Remplaçant OC par son égal OB, il viendra $AC < AB$

131. **Réciproque.** *Si* AC *est plus petit que* AB, *on aura l'angle* B *plus petit que l'angle* ACB.

Car, si l'angle B était égal à l'angle ACB, on aurait le côté AC = AB, ce qui n'est pas; donc l'angle B n'est pas égal à l'angle ACB.

Si l'angle B était plus grand que l'angle ACB, on aurait le côté AC plus grand que AB, ce qui n'est pas; donc l'angle B n'est pas plus grand que l'angle C.

Or, l'angle B n'étant pas égal à l'angle C, ni plus grand que lui, il faut nécessairement qu'il soit plus petit.

IX.

132. **Théorème.** *Fig.* 19. *Si l'on diminue l'angle formé par deux côtés* AC, AB, *d'un triangle* CAB, *le côté opposé à cet angle diminuera.*

Démonstration. Supposons que le côté AC prenne la position AD, on aura :

$$BD < BI + ID$$
$$AC < AI + IC$$

Mais $AI + ID = AD$

De plus $AD = AC.$

Ajoutant les inégalités avec les équations, et supprimant les termes qui se détruisent de part et d'autre, il restera : $BD < BI + IC$;

d'où $BD < BC.$

Si le point D tombait dans l'intérieur du triangle, *fig.* 20.

On aurait : $BD < BI + DI$
Mais $AD + DI < AC + CI$;
De plus $AC = AD$.

Ajoutant et réduisant, il resterait :

$BD < BI + CI$;

d'où $BD < BC$.

Enfin, Si le point D tombait sur BC, *fig.* 21, on aurait évidemment $BD < BC$.

133. **Corollaire**. *Fig.* 20, 21 et 22. Si deux côtés AB, AD, d'un triangle, sont égaux à deux côtés AB, AC, d'un autre triangle, et si l'angle DAB est plus petit que l'angle CAB, le troisième côté BD du premier triangle sera plus petit que le troisième côté BC du second.

La relation qui vient d'être énoncée est indépendante de la position relative des deux triangles auxquels on n'a supposé un côté commun que pour faciliter la démonstration.

X.

134. **Théorème.** *Par un point on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur une droite.*

Démonstration. Lorsque le point dont il s'agit appartient à la droite, la proposition est évidente, car si les deux droites AB, AC, *fig.* 1, Pl. 3, étaient toutes les deux perpendiculaires sur DE, on aurait l'*angle droit* DAC plus grand que l'*angle droit* DAB, ce qui ne se peut pas (59).

Si le point A est en dehors de la droite, *fig.* 2, il est également impossible de concevoir *deux perpendiculaires* AB, AC, car dans le triangle ABC on aurait la somme des trois angles plus grande que deux angles droits (114).

Si AB est perpendiculaire sur HD, la droite AC sera nécessairement *oblique*.

135. **Corollaire** I. Si le point A s'éloignait de la droite

HD, en glissant sur la perpendiculaire BA, l'angle ACB augmenterait, tandis que l'angle BAC diminuerait; et lorsque le point A serait infiniment loin, l'angle ACB vaudrait un angle droit, l'angle BAC serait *nul*, et les deux droites BA, CA, seraient *parallèles* (83). C'est pourquoi on dit quelquefois que *deux lignes parallèles ne font pas d'angle entre elles.*

136. **Cor.** II. Si ABC est un angle droit, l'angle ACB sera nécessairement aigu, et la *perpendiculaire* AB opposée à l'angle aigu ACB, sera plus courte que l'*oblique* AC opposée à l'angle droit ABC (129). Par conséquent, *le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est toujours plus court que l'hypoténuse.*

La perpendiculaire AB étant plus courte que l'oblique, elle représentera le plus court chemin ou la *distance* du point A à la droite HD.

137. **Cor.** III. L'angle ACB étant aigu, son supplément ACD sera obtus.

L'angle ACD étant obtus, l'angle ADC est nécessairement aigu (114). Il résulte de là que l'oblique AC, opposée à l'angle aigu ADC, est plus courte que l'oblique AD, opposée à l'angle obtus ACD. Par conséquent,

L'oblique qui s'écarte le plus de la perpendiculaire est la plus longue.

138. **Cor.** IV. Les deux obliques AH, AC, qui s'écartent également de la perpendiculaire AB, sont égales, car si l'on plie la figure suivant AB, il est évident qu'elles se confondront.

139. **Cor.** V. Si les deux obliques AH, AC, sont *égales*, elles s'écartent *également* du pied de la perpendiculaire, car (137) si elles s'en écartaient inégalement, l'une d'elles serait plus longue que l'autre.

XI.

140. Théorème. *Fig. 3. Si la droite* CD *est perpendiculaire au milieu de* AB, *chaque point de* CD *est à égale distance des deux points* A *et* B.

Démonstration. Les obliques AH, HB, sont égales, puisqu'elles s'écartent également de la perpendiculaire HO.

On a de même AS = SB, AI = IB.

141. Corollaire I. Tout point tel que U, pris en dehors de la perpendiculaire CD, est inégalement éloigné des deux points A et B, car si l'on conçoit les droites AU, UB, DB, on aura (138) : DB = AD ;
Mais UB < DU + DB.

Ajoutant et réduisant, il restera :

UB < AD + DU ;
d'où UB < AU.

142. Cor. II. Toutes les fois que deux points D, H, seront à égale distance de deux autres A, B, la droite qui joindra les premiers points sera perpendiculaire au milieu de celle qui joint les deux derniers.

XII.

143. Théorème. *Fig. 4. Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Démonstration. Soit AB = DE, AC = DF, et l'angle A = D. Transportons le côté AB sur son égal DE, l'angle A étant égal à l'angle D, le côté AC prendra la direction DF, et ces deux côtés étant égaux, le point C tombera sur le point F. De plus, BC coïncidera exactement avec EF, puisque d'un point à un autre on ne peut mener qu'une

seule ligne droite. Ainsi, l'angle B = E, l'angle C = F, et le côté BC = EF.

144. **Remarque**. En général, lorsqu'on a démontré l'égalité de deux figures on peut en conclure l'égalité de toutes les parties correspondantes ou *homologues*.

On nomme angles ou côtés **homologues**, les angles ou les côtés placés de la même manière dans les deux figures ; ainsi, par exemple, les côtés opposés ou adjacents aux angles égaux, les angles opposés ou adjacents aux côtés égaux.

XIII.

145. **Théorème**. *Fig. 4. Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Démonstration. Soit le côté AB = DE, l'angle A = D, et l'angle B = E. Transportons le côté AB sur son égal DE; l'angle A étant égal à l'angle D, le côté AC prendra la direction DF et le point C tombera quelque part sur DF ; mais, l'angle B étant égal à l'angle E, le côté BC prendra la direction EF, et le point C tombera sur EF. Or, le point C devant se trouver en même temps sur les deux droites EF et DF, ne pourra tomber qu'au point F suivant lequel ces deux lignes se coupent. Les deux triangles seront donc égaux, par conséquent BC = EF, AC = DF, et l'angle C = F.

XIV.

146. **Théorème**. *Fig. 4. Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Démonstration. Soit les côtés AB, AC, BC, égaux aux côtés ED, DF, EF ; si l'angle A était plus petit que D, on aurait (133) BC $<$ EF ; ce qui n'est pas, donc l'angle A *n'est pas plus petit que* D. Si l'angle A était plus grand

que D, on aurait BC $>$ EF; ce qui n'est pas, donc l'angle A *n'est pas plus grand que* D. Or, l'angle A n'étant pas plus petit ni plus grand que D, il lui est égal, et les deux triangles sont égaux (143); d'où l'on pourra conclure que l'angle B $=$ E, et que l'angle C $=$ F.

XV.

147. **Théorème.** *Fig.* 5. *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.*

Démonstration. Si l'on conçoit la diagonale AC, les deux triangles ABC, ACD, seront égaux (145), car ils auront le côté commun AC, l'angle BAC $=$ ACD comme *alternes-internes* (102), et l'angle ACB $=$ CAD par la même raison; donc le côté AD $=$ BC, le côté AB $=$ CD, l'angle ADC $=$ CBA, et l'angle BAD, composé des deux angles BAC $+$ CAD, est égal à l'angle BCD, composé des deux angles BCA $+$ ACD.

Il est d'ailleurs facile de voir que les angles opposés du parallélogramme sont égaux comme ayant les côtés parallèles (87).

148. **Corollaire** I. *Fig.* 5. Deux parallèles AB, CD, comprises entre deux autres parallèles sont égales.

149. **Cor.** II. *Fig.* 6. Toutes les perpendiculaires AB, CD, EF, tracées où l'on voudra entre deux parallèles, sont égales. Par conséquent, deux parallèles sont partout à égale *distance* l'une de l'autre; et lorsqu'on dit que deux parallèles se *rencontrent à l'infini*, cela signifie que leur distance devient infiniment petite, *relativement* à leur immense longueur.

XVI.

150. **Théorème.** *Fig.* 5. *Lorsque les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, ils sont parallèles, et la figure est un parallélogramme.*

Démonstration. Si l'on conçoit la diagonale AC, les deux triangles ABC, CDA, seront égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, donc l'angle

$$DAC = ACB = PCM;$$

d'où l'on peut conclure que les deux droites AD, BP, sont parallèles, puisqu'elles font des angles égaux avec la sécante AM.

On reconnaîtra de même que le côté AB est parallèle à CD.

XVII.

151. **Théorème**. *Fig.* 5. *Si deux droites* AD, BC, *sont égales et parallèles, le quadrilatère, que l'on formera en traçant les droites* BA, CD, *sera un parallélogramme.*

Démonstration. Si l'on conçoit la diagonale AC, les deux triangles ABC, CAD, seront égaux comme ayant un angle égal DAC = ACB, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir AD = BC, puis AC commun; donc l'angle ABC = ADC, mais les droites AD, BC, étant parallèles, on a ADC = DCP, comme *alternes-internes*.

Ajoutant les deux équations et réduisant, il restera ABC = DCP, par conséquent les droites AB, DC, sont parallèles puisqu'elles font des angles égaux avec la sécante BP.

XVIII.

152. **Théorème**. *Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent en parties égales.*

Démonstration. *Fig.* 7. On a AB = CD, comme côtés opposés d'un parallélogramme. Deplus, l'angleBAO=OCD comme alternes-iuternes, et l'angle ABO = ODC par la même raison; donc les deux triangles ABO, COD, sont égaux (145). Par conséquent on aura BO = OD et AO = OC.

153. Corollaire. *Fig.* 8. Si le quadrilatère est un losange, c'est-à-dire si les quatre côtés sont égaux, *les diagonales se coupent à angles droits* (142).

XIX.

154. Théorème. *Fig.* 9. *Dans tout polygone régulier il existe un point situé à égale distance de tous les sommets : ce point se nomme le* **centre** *du polygone.*

Démonstration. Les droites BO, CO, qui partagent en deux parties égales les angles ABC, BCD, ne sont pas parallèles, car chacun des angles OBC, BCO, étant évidemment plus petit qu'un angle droit, leur somme est plus petite que deux angles droits.

Les deux droites BO, CO, n'étant pas parallèles, se rencontrent au point O, et le triangle OBC est isocèle puisque l'angle OBC, moitié de ABC, est égal à l'angle BCO, moitié de BCD.

Si actuellement on conçoit la droite OD, le triangle OCD sera égal au triangle OBC, car ils ont le côté OC commun, le côté $BC = CD$, comme côtés d'un polygone régulier, et, de plus, l'angle $BCO = OCD$; donc OD sera égal à OB.

On démontrerait de la même manière que les droites OH, OK, OS, sont égales à OB, d'où il résulte que le point O est à *égale distance* de tous les sommets du polygone.

155. Corollaire. Tous les angles BOC, COD, DOH, sont égaux entre eux, par conséquent *chacun d'eux est égal à quatre angles droits, divisés par le nombre des côtés du polygone.* Ainsi, par exemple, dans un polygone régulier de 14 côtés, l'angle au centre vaudrait $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.

XX.

156. Théorème. *Si le nombre des côtés d'un polygone régulier est pair, les côtés opposés seront parallèles.*

3

Démonstration. *Fig.* 9. La somme des angles formés au point O, et d'un même côté de la ligne KOB, vaut évidemment la moitié de quatre angles droits, par conséquent les trois points K, O, B, sont en ligne droite, mais les angles ABO, OKH, sont égaux, comme appartenant à des triangles égaux; donc les droites AB, KH, sont parallèles.

CHAPITRE III.

Circonférence.

I.

157. **Définitions.** *La circonférence du cercle*, fig. 10, est une courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur que l'on appelle *centre*.

158. Le *cercle* est l'espace contenu dans la circonférence.

159. Les droites OA, OB, OC, menées du centre à la circonférence, se nomment *rayons*.

Tous les rayons sont égaux, puisque chacun d'eux mesure la distance du centre à un point de la circonférence.

160. Une droite telle que KH, qui, en passant par le centre, se termine de part et d'autre à la circonférence, se nomme un *diamètre*.

Tous les diamètres sont égaux, puisque chacun d'eux est composé de deux rayons.

161. Un *arc* est une partie de la circonférence.

162. La partie de surface de cercle, comprise entre un arc et les deux rayons qui aboutissent à ses extrémités, se nomme un *secteur*. BOCI est un *secteur de cercle*.

163. Toute droite telle que VU, qui joint les deux extrémités d'un arc, se nomme la *corde* ou *sous-tendante* de cet arc.

164. La partie de surface de cercle comprise entre l'arc et la corde se nomme *segment*. VZUM est un segment.

165. Une droite telle que MN, *fig.* 11, qui coupe la circonférence en deux points A et B, est une *sécante*.

166. Si l'on fait tourner la sécante MN autour du point A, et qu'on lui fasse prendre les positions M'N', M''N'', le point B devient successivement B', B'', etc., et lorsque les deux points de section sont réunis en un seul, la droite mobile arrive dans la position M'''N'''. On dit alors qu'elle est *tangente* au cercle.

167. Lorsque les deux points de section sont réunis, ils n'occupent pas plus d'espace qu'un seul; c'est pourquoi l'on dit souvent que *la tangente est une droite qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence*.

168. Le point A se nomme alors *point de contact*.

169. On peut encore supposer que la tangente provient d'une sécante VU, que l'on aurait fait mouvoir parallèlement à elle-même jusqu'à ce que les deux points de section C, C', soient réunis en C''.

On dit qu'une droite se meut *parallèlement à elle-même,* lorsque toutes ses positions sont parallèles entre elles; ainsi, par exemple, si la droite VU devient successivement V'U', V''U'', elle se meut parallèlement à elle-même.

170. Un *angle inscrit* ABC, *fig.* 12, est celui qui a son sommet sur la circonférence.

171. Un *polygone* ABCD *est inscrit*, lorsque tous ses sommets sont situés sur la circonférence.

172. Un polygone PQMNS, *fig.* 13, est *circonscrit*, lorsque tous ses côtés sont tangents à la circonférence.

173. Lorsque deux cercles ont le même centre, *fig.* 13, leurs circonférences sont partout à égale distance, et l'on dit alors qu'ils sont *concentriques*.

II.

174. **Théorème.** *Tout diamètre partage le cercle et la circonférence en deux parties égales.*

Démonstration. *Fig.* 10. Si l'on conçoit la figure pliée suivant le diamètre HK, il est évident que les deux parties coïncideront, car, sans cela, il y aurait des points de la circonférence qui seraient inégalement éloignés du centre.

III.

175. **Théorème.** *Si deux arcs* AB, CD, *fig.* 14, *sont égaux, leurs cordes sont égales.*

Démonstration. Concevons la figure pliée suivant le diamètre VU, qui aboutit au milieu de AC; il est évident que l'arc AB doit coïncider avec son égal CD, et les deux cordes coïncideront également, puisque d'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite (23).

176. **Réciproque.** Si les cordes AB, CD, sont égales, on pourra plier la figure de manière à faire coïncider le triangle ABO avec son égal COD (146); par conséquent, les deux arcs coïncideront, puisque tous leurs points sont à égale distance du centre.

177. **Corollaire.** Les deux cordes égales AB, CD, coïncidant, lorsque l'on plie la figure suivant le diamètre VU,

il s'ensuit que la perpendiculaire OI, abaissée du centre sur AB, doit coïncider avec la perpendiculaire OS, abaissée du centre sur CD; par conséquent, *deux cordes égales sont également éloignées du centre.*

IV.

178. **Théorème.** *Fig.* 15. *Si l'arc* AB *est plus petit que l'arc* AC, *la corde* AB *sera plus petite que* AC.

Démonstration. Concevons les rayons OA, OB, OC, et la droite OS qui partage l'angle COB en deux parties égales; on aura le triangle COS égal au triangle OSB, puisqu'ils ont le côté OS commun, le rayon OC = OB et l'angle COS = SOB, par conséquent,

$$SB = SC;$$

mais on a $AB < AS + SB.$

Ajoutant et réduisant, on aura :

$$AB < AS + SC;$$

d'où $AB < AC.$

Si les deux arcs dont il s'agit n'avaient pas d'extrémité commune, on transporterait le plus petit sur le plus grand, et la démonstration serait la même.

179. **Remarque.** Si chacun des arcs comparés était plus grand qu'une demi-circonférence, ce serait au contraire le plus grand arc qui aurait la plus petite corde.

180. **Corollaire** I. *Le diamètre est la plus grande corde que l'on puisse tracer dans un cercle.*

181 **Cor.** II. Si l'on fait tourner une corde AB, *fig.* 11, autour de l'une de ses extrémités A, elle diminuera d'autant plus qu'elle s'éloignera davantage du centre, parce que l'arc sous-tendu deviendra plus petit.

182. **Cor.** III. La corde AB, *fig.* 11, n'étant autre chose

que la partie de la sécante comprise dans le cercle, il en résulte qu'au moment où les deux points de section se réunissent, la corde se réduit à zéro et devient un *point de contact*. Ainsi le point de contact peut être considéré comme la plus petite corde que l'on peut tracer dans le cercle.

V.

183. **Théorème.** *Fig.* 16. *La droite* OC, *perpendiculaire au milieu d'une corde* AB, *doit passer par le centre du cercle et par le milieu de l'arc* ACB.

Démonstration. On a OA = OB, comme rayon d'un même cercle, par conséquent le centre O appartient à la perpendiculaire au milieu de AB (140); de plus, le point C appartenant à la perpendiculaire élevé par le milieu de AB, on a la corde AC = CB; donc les arcs sous-tendus sont égaux et le point C est le milieu de l'arc ACB.

184. **Corollaire** I. Les rayons OA, OB, étant égaux, le triangle AOB est isocèle, et la perpendiculaire, abaissée du centre O, doit passer par le point H, milieu de la corde (129).

185. **Cor** II. *Fig.* 11. Si l'on fait mouvoir la droite VU *parallèlement à elle-même*, en l'éloignant du centre O, les deux points C, C', se rapprocheront, et la corde CC' diminuera de longueur sans cesser d'être perpendiculaire à la droite OC''. Lorsque les deux points de section seront réunis, la droite V''U'' sera une *tangente* (169) et la perpendiculaire OC'' sera un *rayon;* d'où l on peut conclure que la *tangente est toujours perpendiculaire à l'extrémité du rayon.*

186. **Cor.** III. Toute droite, telle que V''U'', perpendiculaire à l'extrémité du rayon, est une tangente à la circonférence; car toute oblique telle que OH, sera plus

longue que la perpendiculaire OC″. Par conséquent, à l'exception de C′, tous les points de la droite V″U″ seront en dehors du cercle.

VI.

187. **Théorème.** *Fig.* 17. *Lorsque deux droites parallèles* AB, CD, *rencontrent une circonférence, les arcs interceptés* AC, BD *sont égaux.*

Démonstration. Concevons le rayon OH perpendiculaire sur AB, et par conséquent sur CD, on aura (183, 184)

l'arc AH = BH;

mais on a également CH = DH.

Retranchant la seconde équation de la première, on obtient AH — CH = BH — DH;

d'où AC = BD.

Si le centre est situé entre les deux parallèles AB, EF, on pourra concevoir un diamètre KS, parallèle aux deux lignes données; alors on aura EK = FS,

KA = SB.

Ajoutant les deux équations, on obtient :

FK + KA = FS + SB;

d'où EA = FB.

Si l'une des droites est tangente au cercle, on concevra le rayon OH, qui aboutit au point de contact, et qui, étant perpendiculaire sur la tangente (185), sera également perpendiculaire sur sa parallèle CD; alors on en pourra conclure que le point H est le milieu de l'arc CHD.

VII.

188. **Théorème.** *Fig.* 14. *Si deux angles* AOB, COD, *ont leur sommet au centre d'un cercle, et qu'ils com-*

prennent entre leurs côtés deux arcs égaux AB, CD, *ils sont égaux.*

Démonstration. Les triangles AOB, COD, sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; donc les cordes AB, CD, sont égales et les arcs sous-tendus sont par conséquent égaux.

189. **Réciproque.** Si les arcs AB, CD, sont égaux, les cordes seront égales et les deux triangles AOB, COD, seront égaux, comme ayant les trois côtés égaux, par conséquent les angles AOB, COD, seront égaux.

VIII.

190. **Théorème.** *Tout angle qui a son sommet sur la circonférence, vaut la moitié de l'angle au centre qui comprendrait le même arc entre ses côtés.*

Démonstration. Soit d'abord, *fig.* 18, l'angle BAC, formé par une corde AB et par le diamètre AC. Si l'on trace le rayon BO, le triangle AOB sera isocèle, et l'on aura l'angle $BAO = ABO$;
mais on a (110) $ABO + BAO = BOC$.

Ajoutant et réduisant il restera :

$$2BAO = BOC;$$

d'où $$BAO = \frac{BOC}{2}.$$

191. **Corollaire** I. Si l'angle BAC, *fig.* 19, est formé par les deux cordes BA, AC, on aura, par ce qui précède :

$$BAO = \frac{BOD}{2},$$

$$OAC = \frac{DOC}{2}.$$

Ajoutant les deux équations, on obtient :

$$BAO + OAC = \frac{BOD + DOC}{2};$$

d'où $$BAC = \frac{BOC}{2}.$$

192. COR. II. Si le centre du cercle n'est pas situé entre les côtés de l'angle, *fig.* 20, on aura (190) :

$$BAO = \frac{BOD}{2},$$

$$CAO = \frac{COD}{2}.$$

Retranchant la seconde équation de la première, on obtient $$BAO - CAO = \frac{BOD - COD}{2},$$

d'où $$BAC = \frac{BOC}{2}.$$

193. COR. III. Si l'arc BDC, *fig.* 21, est une demi-circonférence, les rayons BO, CO, seront en ligne droite et formeront un diamètre, alors on aura :

$$BAO = \frac{BOD}{2},$$

$$OAC = \frac{DOC}{2}.$$

Ajoutant et réduisant, on obtient :

$$BAO + OAC = \frac{BOD + DOC}{2};$$

d'où $BAC = \frac{BOD + DOC}{2} = 1$ *angle droit.*

Ce qui est conforme à l'énoncé du théorème, puisque l'on peut considérer l'angle formé par les rayons BO, OC, comme étant égal à deux angles droits (49).

194. **cor.** IV. Si l'arc BDC, *fig.* 22, est plus grand qu'une demi-circonférence, on aura encore :

l'angle $BAO = \frac{BOD}{2}$;

mais $OAC = \frac{DOC}{2}$.

Ajoutant et réduisant : $BAC = \frac{BOD + DOC}{2}$.

195. **cor.** V. Si l'angle BAC, *fig.* 24, est formé par la corde AC et par la tangente AB, on mènera la droite OI, qui partage l'angle AOC en deux parties égales, et qui par conséquent est perpendiculaire sur AC (117), on aura

l'angle $AOI = IOC$;

donc $IOC = \frac{AOC}{2}$,

mais on a $BAC = AOI$,

parce qu'ils ont ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun (89).

Ajoutant les trois équations, et réduisant, on obtient :

$$BAC = \frac{AOC}{2}.$$

196. **cor.** VI. *Fig.* 1, Pl. 4. Tous les angles ACB, ADB, AHB, etc., inscrits dans le segment ACDHB, sont égaux entre eux, puisque chacun d'eux vaut la moitié de l'angle AOB.

Tous les angles inscrits dans le segment ASB, seraient aussi égaux entre eux.

197. **cor.** VII. *Fig.* 2. Tous les angles inscrits dans le demi-cercle ABCDH sont *droits*, puisque chacun d'eux vaut la moitié de la somme des deux angles AOK + KOH.

198. **cor.** VIII. *Fig.* 1. Tout angle inscrit dans le segment ACDHB, plus grand que la moitié du cercle, est un

angle aigu, puisqu'il est égal à la moitié de l'angle AOB, qui est plus petit que deux angles droits.

Tout angle inscrit dans le segment ASB, plus petit que la moitié du cercle, sera un angle obtus, puisqu'il vaudra la moitié de la somme des deux angles AOK + KOB, laquelle somme est évidemment plus grande que deux angles droits.

199. **cor.** IX. *Fig.* 2. Tout angle inscrit dans le segment ASB, est le supplément de l'un des angles inscrits dans le segment ACDHB, car on a :

$$ADB = \frac{AOB}{2},$$

$$ASB = \frac{AOK + KOB}{2}.$$

Ajoutant et réduisant, on obtient :

$$ADB + ASB = \frac{AOB + AOK + KOB}{2} = \frac{4 \textit{ angles droits}}{2} =$$

$$= 2 \textit{ angles droits}.$$

200. **cor.** X. *Fig.* 1. Dans un quadrilatère inscrit, la somme des angles opposés vaut toujours deux angles droits, car on aura, par le théorème précédent :

$$ADB + ASB = 2.$$

En traçant la diagonale DS on aurait de même :

$$DAS + DBS = 2.$$

IX.

201. **Théorème.** *Fig.* 3. *L'angle* BAC, *formé par les deux tangentes* AB, AC, *est le supplément de l'angle* BOC, *formé par les rayons qui aboutissent aux points de tangence.*

Démonstration. La somme des angles du quadrilatère ABOC vaut quatre angles droits ; mais on a (185) :

$$ABO + OCA = 2 \text{ droits},$$

par conséquent on aura :

$$BAC + BOC = 2 \text{ droits}.$$

202. **Corollaire**. Le triangle BOC étant isocèle, les angles OBC, OCB, sont égaux, donc leurs compléments ABC, ACB, sont égaux, et le triangle ABC est isocèle. Ainsi les deux tangentes AB, AC, sont égales.

X.

203. **Théorème**. *Fig. 4. Si les points* A, B, C, D, *partagent la circonférence en parties égales, le polygone inscrit* ABCDH, etc., *sera régulier*.

Démonstration. Les cordes AB, BC, CD, sont égales, puisqu'elles sous-tendent des arcs égaux (175). Les droites AO, BO, CO, sont égales comme rayons d'un même cercle ; donc les triangles isocèles AOB, BOC, COD, etc., sont égaux entre eux. Par conséquent, les angles ABC, BCD, CDH, sont égaux, et le polygone, ayant ses angles et ses côtés égaux, on peut en conclure qu'il est régulier.

204. **Corollaire**. La différence entre le polygone et le cercle se compose de tous les segments compris entre les cordes et les arcs sous-tendus ; cette différence sera d'autant plus petite que le nombre des côtés sera plus grand, et deviendrait nulle si le nombre de ces côtés était infini, c'est pourquoi *on peut considérer le cercle, comme un polygone régulier qui aurait un nombre infini de côtés*.

XI.

205. **Théorème**. *Fig. 4. Si par chacun des points* A, B, C, etc., *placés à égale distance sur la circonférence d'un*

cercle, on construit une tangente, le polygone formé par toutes ces droites sera régulier.

Démonstration. Les triangles ABK, BCH, sont isocèles (202); de plus, ils sont égaux, puisque leurs bases AB, BC, sous-tendent des arcs égaux; donc les angles aux points K, H, V, seront égaux. On aura donc :

$$KB + BH = HC + CV,$$

ou ce qui est la même chose,

$$KH = HV.$$

Par conséquent le polygone KHVM, ayant ses angles et ses côtés égaux, sera régulier.

206. **Corollaire** I. *Fig.* 5. Si les côtés du polygone extérieur touchent le cercle au milieu des arcs sous-tendus par les côtés du polygone intérieur, les côtés de ces polygones seront parallèles, car la tangente KH et la corde AB seront toutes deux perpendiculaires sur le rayon qui aboutit au point de tangence P.

207. **Cor.** II. Les sommets du polygone extérieur sont situés sur les prolongements des rayons qui aboutissent aux sommets du polygone intérieur. En effet, les arcs AB, BC, étant égaux, on aura PB, moitié du premier arc, égal à BQ, moitié du second. Le rayon OB sera donc perpendiculaire sur la corde PQ, et passera, par conséquent par le point H, puisque le triangle PQH est isocèle (202).

208. **Cor.** III. Si l'on augmentait en même temps le nombre des côtés des deux polygones, ils se rapprocheraient du cercle, qui cependant serait toujours compris entre eux, et les trois figures se confondraient si le nombre des côtés des deux polygones devenait infini.

XII.

209. **Théorème**. *Fig.* 6. *Étant donné un polygone régulier, il est toujours possible de tracer deux circonfé-*

rences ayant le même centre que le polygone, et dont l'une passerait par tous les sommets, tandis que la seconde serait tangente à tous les côtés.

Démonstration. On a vu (154) que tous les sommets d'un polygone régulier sont à égale distance d'un point intérieur O, il est donc évident que ce point sera le centre d'un cercle dont la circonférence passerait par tous les sommets du polygone donné; mais tous les côtés de ce polygone étant égaux, ils seront à égale distance du point O (177), par conséquent la circonférence du cercle, qui aurait pour rayon OI, devra passer par les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés, qui seront alors tangents au deuxième cercle, puisque chacun d'eux sera perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.

On dit alors que le premier cercle est *circonscrit* au polygone, et le second cercle est *inscrit*.

XIII.

210. **Théorème.** *Fig. 7. Lorsque deux cercles se coupent, la droite* CO*, qui passe par les centres, est perpendiculaire sur la corde* AA'*, qui joint les deux points d'intersection.*

Démonstration. Le point C, comme centre du premier cercle, est à égale distance des points A et A'. Le point O, centre du second cercle, est aussi à égale distance des mêmes points, par conséquent, la droite qui joint les deux points C et O, est perpendiculaire au milieu de la corde AA' (142).

211. **Corollaire.** Si l'on joint les centres des deux cercles avec l'un des points de section, on aura un triangle ACO; mais on sait que dans un triangle un côté est toujours plus petit que la somme des deux autres, par conséquent on aura

$CO < CA + AO$, c'est-à-dire que la distance des centres est plus petite que la somme des rayons; mais on a de plus $AC < AO + CO$; d'où l'on tire, en retranchant AO de chaque côté, $AC - AO < CO$, ou, en renversant l'inégalité, $CO > AC - AO$; donc la distance des centres doit être plus grande que la différence des rayons.

Ainsi, en général, *pour que deux cercles se coupent, il faut que la distance des centres soit plus petite que la somme, et plus grande que la différence des rayons.*

XIV.

212. **Théorème.** *Fig.* 8. *Deux cercles sont tangents l'un à l'autre lorsqu'ils ont une tangente commune.*

Le point de tangence et les centres sont toujours situés sur une même ligne droite perpendiculaire à la tangente.

Démonstration. La droite MN, est une sécante commune aux deux cercles qui ont leurs centres en C et en O. Si l'on suppose que ce dernier centre prenne successivement les positions O′, O″, les points A et A′ se rapprocheront, la sécante MN deviendra successivement M′N′, M″N″ sans cesser d'être perpendiculaire sur la droite CO, et lorsque les deux points de section seront réunis en A″, la droite M″N″ sera une tangente commune aux deux cercles, et les deux cercles eux-mêmes se toucheront.

On arriverait au même résultat en supposant, par exemple, que le cercle qui a son centre au point U, tourne autour du point B. Dans ce mouvement, le centre U, du cercle mobile, devient successivement U′, U″, le second point de section B′ se rapproche du premier, la sécante VU tourne autour du point B sans cesser d'être perpendiculaire sur la ligne des centres, et lorsque les deux points de section sont réunis, la droite V′U′ est une tangente commune.

213. **Corollaire** I. Lorsque deux cercles se touchent, *fig.* 8, *la distance des centres* CO″ *est égale à la somme des rayons* CA″ + A″O″.

214. **Cor.** II. Si l'un des cercles touchait l'autre intérieurement, *fig.* 9, on aurait CO = AC — AO, c'est-à-dire qu'alors *la distance des centres serait égale à la différence des rayons.*

XV.

215. **Théorème.** *L'angle formé par deux arcs de cercle est le même que l'angle formé au point d'intersection par les tangentes à ces deux arcs.*

Démonstration. La tangente à un arc de cercle, pouvant être considérée comme le prolongement de la corde infiniment petite qui se confond avec cet arc, il s'ensuit que l'angle formé au point S, *fig.* 7, par les deux tangentes SB′, SD′, exprime l'inclinaison suivant laquelle les deux arcs SB, SD, se rencontrent.

216. **Corollaire** I. Si l'on faisait tourner l'arc SB autour du point S, l'angle formé par les deux tangentes pourrait passer par tous les états de grandeur, cet angle diminuerait à mesure que les deux points de section se rapprocheraient, et lorsque ces deux points seraient réunis, les deux tangentes n'en feraient plus qu'une seule qui serait commune aux deux cercles.

217. **Cor.** II. Si la tangente CK à l'un des deux arcs de cercle contient le centre de l'autre, on en pourra conclure que les deux tangentes, et, par conséquent, les deux arcs correspondants se rencontrent à angles droits (185).

CHAPITRE IV.

Problèmes.

I.

218. **Instruments.** Les problèmes de géométrie peuvent être résolus de deux manières principales, savoir : par le *dessin* ou par le *calcul.*

Les instruments nécessaires pour décrire les figures de géométrie sont si généralement connus, qu'il semblera peut-être inutile d'en donner ici les définitions. Cependant, le but de cet ouvrage étant surtout de préparer à la pratique, il n'est pas indifférent de faire connaître par quel enchaînement d'idées on a pu obtenir le degré de précision auquel on est parvenu dans certaines parties des applications mathématiques.

La surface sur laquelle on dessine les figures de géométrie doit être *plane;* or, nous avons vu (28) qu'un plan est une surface sur laquelle une ligne droite peut être appliquée dans tous les sens ; la ligne droite est donc nécessaire à la construction du plan.

L'instrument à l'aide duquel on trace une ligne droite se nomme une *règle.*

Une règle peut servir à construire un plan ; un plan peut servir à vérifier une règle ; mais comment a-t-on pu obtenir la première règle ? comment est-on parvenu à dresser le premier plan ?

En général, dans les arts industriels, on n'arrive pas tout

d'un coup à des résultats parfaits. On commence par une première ébauche dont les défauts sont corrigés successivement, à mesure que des instruments plus exacts permettent de les découvrir.

Ainsi, par exemple, un homme avec un couteau pourra couper une branche d'arbre à peu près droite. En plaçant une extrémité de cette branche contre son œil, et regardant l'autre extrémité, il reconnaîtra quelles sont les parties saillantes ou rentrantes, et quand il aura fait disparaître, à la vue, les principales inégalités, il aura une première règle grossière.

Supposons actuellement qu'il prenne un bloc de pierre ou un tronc d'arbre, et qu'il abatte toutes les parties saillantes de la surface jusqu'à ce qu'il puisse y appliquer sa règle dans tous les sens; il aura une surface plane.

En posant sa règle sur la surface plane qu'il vient d'obtenir, il tracera, *fig.* 11, une ligne CD qui serait parfaitement droite si la règle et le plan étaient bien dressés. Pour vérifier la règle, et pour en reconnaître les défauts, il pourra la retourner de manière que l'angle M soit en M′ et l'angle N en N′. Lorsque la règle sera dans cette nouvelle position, il tracera la ligne C′D′. Si la ligne CD, tracée par la première opération, coïncide avec la ligne C′D′, on pourra conclure que la règle est suffisamment droite; mais si les deux lignes CD, C′D′, ne coïncident pas, il sera facile de reconnaître les parties qui auront besoin d'être retouchées. Ainsi, par exemple, là où les deux lignes CD, C′D′, s'écarteront l'une de l'autre, il y aura évidemment un creux dans la direction de la règle, et lorsqu'au contraire les deux lignes se croiseront, cela indiquera une partie saillante.

La règle corrigée étant appliquée de nouveau sur le plan, indiquera les inégalités de cette surface, qui à son tour pourra faire reconnaître sur la règle des défauts

échappés à la première vérification, et ainsi de suite.

Dans l'application, la face inférieure d'un *rabot* est le plan qui sert à dresser la *règle*.

Ce que je viens de dire suffit pour faire comprendre comment, par des comparaisons réciproques, les instruments peuvent être employés pour se vérifier mutuellement, et arriver après une suite de corrections successives, à une perfection presque absolue.

219. La **règle** doit être mince et un peu large, afin qu'elle puisse mieux s'appliquer sur le papier.

220. **Planche à dessin**. Lorsque la question que l'on veut résoudre est très-composée, lorsqu'elle exige la construction d'un grand nombre de lignes tracées avec précision, il faut se procurer une planche bien dressée, sur laquelle on collera, par les bords *seulement*, une feuille de papier légèrement humectée avec une éponge. Lorsque cette opération est faite avec soin, et qu'il n'y a aucun pli autour de la feuille, elle se resserre en séchant; tous les gonflements produits par l'humidité disparaissent, et l'on obtient une surface aussi unie que la peau d'un tambour.

221. Le **tire-ligne**, destiné à tracer à l'encre les figures de géométrie, est une espèce de plume d'acier, composée de deux lames parallèles, minces et allongées en forme de lances, entre lesquelles l'encre se trouve suspendue, et dont une vis peut régler l'écartement, suivant l'épaisseur du trait que l'on veut obtenir.

222. Le **compas** sert à décrire la circonférence du cercle.

Il est probable que, dans l'origine, on a tracé les premières circonférences en attachant au centre l'extrémité d'une corde ou d'une règle égale à la longueur du rayon; un crayon, une plume fixé à l'autre extrémité, ont pu servir à décrire la courbe; mais le peu d'exactitude des

résultats obtenus, a dû faire renoncer promptement à des procédés aussi imparfaits ; et l'on conçoit comment, après une série de perfectionnements successifs, on a pu arriver à la forme actuelle du compas.

Lorsqu'il s'agit de prendre la distance de deux points, on place sur chacun d'eux l'une des pointes du compas.

Mais si l'on veut décrire une circonférence on ajuste à l'une des branches un *porte-crayon* ou un *tire-ligne*.

223. Ainsi, en résumant, les trois instruments les plus essentiels pour tracer les figures de géométrie, sont le plan, la règle et le compas.

Le *plan* est la surface sur laquelle on dessine.

La *règle* est l'instrument avec lequel on trace les lignes droites.

Le *compas* est l'instrument avec lequel on décrit les circonférences de cercles.

Je n'ai pas cru devoir dessiner les différentes pièces du compas, parce que des figures, presque toujours insuffisantes lorsqu'on n'a pas l'instrument sous les yeux, sont d'ailleurs inutiles pour celui qui le possède. Ainsi, je ne donnerai les dessins des instruments qu'autant que cela sera nécessaire pour en expliquer l'usage.

II.

224. **Problème**. *Construire une droite égale à la somme ou à la différence de deux autres droites données* AB, CD, *fig*. 12.

Solution. On tracera une droite A'N, sur laquelle on marquera un point A' ; puis, avec le compas à pointes, on prendra la longueur de la droite AB, que l'on portera de A' en B'. On prendra ensuite la longueur CD, que l'on portera de B' en D'. Il est évident que A'D' sera la somme des deux droites données.

Pour obtenir leur différence, on portera CD de B' en D'' et l'on aura

$$A'D'' = AB - CD.$$

225. **Corollaire** S'il fallait ajouter ou retrancher un grand nombre de lignes droites, on ferait la somme de toutes celles qui doivent être ajoutées; on ferait également la somme de toutes celles qui doivent être retranchées; puis, on prendrait la différence des deux sommes.

III.

226. **Problème**. *Multiplier une ligne droite par un nombre donné.*

Solution. Supposons, par exemple, *fig.* 13, qu'il s'agisse de multiplier la droite AB par 5; on prolongera sa direction de A en M, par exemple et l'on portera la distance AB successsivement de B en C, de C en D, de D en E; enfin de E en F. La droite AF vaudra évidemment cinq fois AB.

IV.

227. **Problème**. *Fig.* 14. *Diviser une droite* AB *en deux parties égales.*

Solution. On prendra un compas muni de son porte-crayon; puis, après avoir ouvert les deux branches d'une quantité plus grande que la moitié de AB, on placera la pointe d'acier sur le point A, et l'on décrira les deux arcs mn, $m'n'$. Du point B comme centre, avec la même ouverture de compas, on décrira les arcs vu, $v'u'$. Les intersections de ces arcs deux à deux, détermineront deux points que l'on joindra par la droite CD. En effet, si l'on traçait les quatre droites AC, BC, AD, BD, il est évident que le quadrilatère ACBD serait un losange (104), et par conséquent un parallélogramme. Or, nous savons (150)

que les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales ; donc AO = OB.

228. **Remarque**. Lorsqu'on emploie ainsi deux arcs de cercle, ou deux lignes quelconques, pour déterminer la position d'un point, il faut tâcher que ces arcs se coupent suivant une direction qui approche le plus possible de l'angle droit (217), parce que les lignes tracées ainsi au crayon, ne sont pas réellement des lignes mathématiques, et, lorsque l'intersection est trop aiguë, comme on le voit aux points Z, Z', *fig.* 10, la largeur du trait peut laisser de l'incertitude sur la position du point de rencontre.

229. **Corollaire** I. L'opération que nous venons d'indiquer, peut évidemment servir pour élever une perpendiculaire par le milieu d'une droite donnée AB.

230. **Cor.** II. Si l'on voulait partager la droite donnée en *quatre* parties égales, il est évident qu'il suffirait, en opérant comme ci-dessus, de partager en deux chacune des deux moitiés AO et BO.

En prenant ensuite la moitié de chaque quart on aurait le *huitième*, etc.

Nous verrons plus tard comment il faudrait opérer pour diviser une ligne droite en tout autre nombre de parties égales.

V.

231. **Problème**. *Fig.* 15. *Par un point* A *donné sur une droite* BC, *élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Solution. On placera la pointe d'acier du compas sur le point donné, puis avec un rayon quelconque on décrira deux arcs de cercle qui couperont la droite donnée aux points B et C à égale distance du point A.

Cela étant fait, on ouvrira le compas d'une quantité plus grande que BA ; puis des points B et C, comme centres, on décrira des arcs qui se couperont au point D.

La droite AD sera la perpendiculaire demandée : car les deux rayons BD, DC étant égaux, le triangle BDC est isocèle, et la droite DA, qui joint le sommet avec le milieu de la base BC, est nécessairement perpendiculaire sur cette base (142).

VI.

232. **Problème**. *Fig.* 16. *Par un point* A *donné hors d'une droite* BC, *on veut abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Solution. On placera la pointe d'acier du compas sur le point A ; puis, avec une ouverture plus grande que la distance à la ligne donnée, on décrira deux arcs qui couperont cette droite aux points B et C. On prendra ensuite ces points pour centres de deux nouveaux arcs qui se couperont au point D.

La droite AD sera la perpendiculaire demandée (142).

VII.

233. **Problème.** *Fig.* 17. *Au point* A *de la droite* AB, *faire un angle égal à l'angle donné* M.

Solution. Du point M, comme centre, et d'un rayon quelconque, on décrira l'arc de cercle PQ. Du point A, comme centre, avec le même rayon, on décrira l'arc BX, on ouvrira ensuite le compas d'une quantité égale à la corde PQ ; et du point B comme centre, on décrira un arc de cercle dont l'intersection avec BX déterminera le point C. On tracera la droite AC, et l'angle CAB sera égal à l'angle QMP.

En effet les arcs BC, PQ sont égaux, puisqu'ils appartiennent à des cercles égaux ; et qu'ils sont sous-tendus par des cordes égales : donc, les angles au centre CAB, QMP, sont égaux (189).

234. **Corollaire**. *Pour ajouter deux angles*, il suffira d'ajouter les arcs compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centres; pourvu que ces arcs soient tracés avec des rayons égaux.

Pour avoir la *différence de deux angles* on prendra la différence des arcs interceptés.

Pour *multiplier un angle par un nombre*, on multipliera l'arc intercepté, c'est-à-dire que l'on portera cet arc à la suite de lui-même, autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre par lequel on veut le multiplier.

Pour *diviser un angle*, on divisera l'arc compris entre ses côtés (*voir le problème suivant*).

VIII

235. **Problème**. *Fig.* 18. *Partager l'angle* BAC *en deux parties égales*.

Solution. 1° Du point A, comme centre, avec un rayon quelconque, on décrira un arc de cercle qui déterminera les deux points B et C; 2° des points B et C, comme centres, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont au point D. La droite AD partagera l'angle BAC en deux parties égales.

En effet, la ligne AD sera perpendiculaire sur le milieu de la corde BC (142); donc, elle passera par le milieu de l'arc (183), et les deux arcs BO, CO étant égaux, les angles BAO, CAO le seront aussi

236. **Corollaire**. En opérant de la même manière, on pourra diviser BO en deux parties égales, et chacune d'elles sera par conséquent le *quart* de l'arc BC.

La moitié du quart sera le *huitième*, la moitié du huitième donnera le *seizième*, et ainsi de suite.

237. **Remarque**. La subdivision d'un arc en 2, 4, 8, 16, 32, etc., parties égales, est la seule que l'on puisse

exécuter rigoureusement par des méthodes élémentaires. Nous parlerons des autres subdivisions, lorsque nous aurons démontré les principes dont elles dépendent.

IX.

238. **Problème**. Par un point A, *fig.* 19, construire une parallèle à une droite donnée HP.

Solution. On tracera la sécante MN; puis, en opérant comme nous l'avons dit au numéro (233), on fera l'angle DAH égal à l'angle PHN. Les deux droites AD, HP, seront parallèles, puisqu'elles feront des angles égaux avec la sécante MN.

239. **2° Solution**. *Fig.* 20. 1° Du point A, comme centre, avec un rayon quelconque, on décrira les deux arcs *mn*, *vu*. Le second de ces deux arcs déterminera le point H.

2° Du point H, comme centre, avec la même ouverture de compas, on décrira l'arc *zx*, qui déterminera le point P.

3° Du point P, comme centre, avec le même rayon, on décrira l'arc *cs*, dont l'intersection avec *mn* déterminera le point D.

4° On tracera la droite AD, qui sera parallèle à HP.

En effet, les arcs *mn*, *vu*, *zx* et *cs*, ayant été décrits avec la même ouverture de compas, il s'ensuit que le quadrilatère ADPH est un losange, et par conséquent un parallélogramme; donc ses côtés opposés AD, HP, sont parallèles.

X.

240. **Instruments**. La nécessité où l'on se trouve souvent de tracer un grand nombre de lignes parallèles ou perpendiculaires, a fait imaginer des moyens plus expé-

ditifs que ceux qui sont indiqués dans les articles précédents. Ainsi,

241. Une **équerre** est un triangle rectangle, ayant à peu près la même épaisseur que la règle. Quelquefois, *fig.* 1, Pl. 5, les deux côtés de l'angle droit sont égaux entre eux ; mais, le plus ordinairement, ils sont inégaux, *fig.* 2.

242. Pour tracer des parallèles à une droite donnée VU, *fig.* 3, on fera coïncider avec cette ligne, l'hypoténuse BC, de l'équerre, et l'on placera la règle contre le côté BA ; on appuiera ensuite la main gauche sur la règle, afin qu'elle ne puisse pas se déranger, et l'on fera glisser l'équerre avec la main droite, jusqu'à ce que l'hypoténuse soit arrivée dans la position de la ligne que l'on veut tracer. Ainsi, par exemple, si la *fig.* 3 représente trois positions successives de l'équerre, il est évident que les droites BC, B'C', B''C'', seront parallèles entre elles, puisqu'elles feront des angles égaux avec la règle, qui remplace ici la sécante dont nous avons parlé dans la définition des parallèles.

On pourra, par le moyen qui vient d'être indiqué, construire en très-peu de temps un grand nombre de parallèles, aussi rapprochées que l'on voudra les unes des autres.

243. Si l'on désire que l'une de ces droites passe par un point donné S, il suffira d'arrêter l'équerre au moment où l'hypoténuse B'C' contiendra ce point.

244. Pour construire, *fig.* 5, une perpendiculaire à la droite donnée CB, on placera l'équerre dans la position CAB; puis, après avoir posé la règle MN, comme on le voit, sur la figure, on retournera l'équerre dans la position B'A'C', et la droite C'B', sera perpendiculaire sur CB.

En effet, on a l'angle

$$C + CBA = 1 \text{ angle droit. ;}$$

mais

$$CB'S = CBA.$$

Ajoutant ces deux équations et réduisant, on aura

$$C + CB'S = 1 \text{ angle droit};$$

donc le triangle CSB' est rectangle en S.

Si l'on fait glisser l'équerre sur la règle, on aura autant de lignes que l'on voudra perpendiculaires sur CB.

245. Le **té**, *fig.* 6, est une espèce d'équerre destinée à tracer des parallèles ou des perpendiculaires aux côtés de la planche à dessin, *fig.* 4.

Le té se compose de deux branches MN, TD, assemblées entre elles, de manière que l'angle TMN soit parfaitement droit.

La branche TD, formant la tête du té, doit être plus épaisse que MN, de manière qu'en plaçant MN sur le dessin, *fig.* 4, l'excédant d'épaisseur de TD soit arrêté contre le bord de la planche.

246. Si l'on amène le té dans la position T'M'N', il est évident que les droites M'N', MN, seront parallèles entre elles, puisqu'elles seront toutes les deux perpendiculaires sur le côté PQ.

247. Pour construire une perpendiculaire à la ligne MN, il suffira de placer le té dans la position D''M''N''; mais pour que la droite M''N'' soit parfaitement perpendiculaire sur MN, il faut :

1° Que les bords PQ, QS, de la planche soient bien exactement perpendiculaires entre eux;

2° Que l'angle formé par les deux branches du té soit rigoureusement droit.

Or, ces deux conditions n'existant presque jamais ensemble, on préfère souvent placer l'équerre CAB, comme on le voit sur la figure, ce qui permet de tracer la droite CA perpendiculaire sur MN.

Il est évident qu'en faisant glisser alternativement le té ou l'équerre, on aura très-promptement un grand nombre

de lignes perpendiculaires et parallèles au côté PQ de la planche.

248. Pour tracer des droites telles que M‴N‴, parallèles à une direction donnée $M^{IV}N^{IV}$, on peut employer un té dont la branche mobile M‴N‴, *fig.* 7, serait fixée à l'aide d'une vis placée en O, suivant l'angle exigé par la question ; mais ce moyen, peu exact et embarrassant, n'est presque jamais employé par les dessinateurs ; ils préfèrent opérer comme nous l'avons dit au numéro précédent.

Construction des figures.

XI.

249. **Notation**. Le triangle étant la figure la plus importante de toute la géométrie, celle qui entre en quelque sorte, comme *élément*, dans la composition de toutes les autres, il est souvent utile d'énoncer les relations qui existent entre les trois angles et les trois côtés qui le composent.

Pour faciliter le langage, lorsque l'on exprime ces relations par des formules algébriques, on est convenu de désigner les angles par les trois lettres A, B, C, et les côtés par les petites lettres a, b, c, de manière que le côté a soit opposé à l'angle A, le côté b à l'angle B, et le côté c à l'angle C.

Lorsque le triangle est rectangle l'angle droit est toujours désigné par la lettre A, et, par conséquent, l'hypoténuse par a.

Lorsqu'il y a un angle obtus on le désigne par la lettre A, et le côté opposé par a.

Lorsque le triangle est isocèle, la lettre A est placée au sommet et le côté a représente la base.

250. **Remarque**. Les conventions précédentes ne sont pas applicables aux triangles qui seraient adjacents à d'autres figures; dans ce cas, il faudra *trois lettres* pour désigner chaque angle, et *deux* pour chacun des côtés.

XII.

251. **Problème**. *Fig.* 8. *Étant donnés deux angles* A *et* B *d'un triangle, on demande le troisième angle* C.

Solution. 1° On tracera une droite quelconque MN; 2° on fera l'angle MOP égal à l'angle donné A; 3° on fera ensuite l'angle POS égal à l'angle B, ce qui fera connaître l'angle C égal à SON.

252. **Remarque**. Les trois angles d'un triangle ne suffisent pas pour déterminer les côtés. En effet, si l'on construit la droite NS parallèle à OP, il est évident que le triangle NOS aura ses angles SNO, OSN et SON, égaux, chacun à chacun, aux angles A, B, C; mais si l'on fait mouvoir la droite NS parallèlement à elle-même, et qu'on lui fasse prendre successivement les positions N'S', N''S'', etc., il est évident que les angles ne changeront pas; on peut donc construire une infinité de triangles ayant les angles égaux chacun à chacun à trois angles donnés, pourvu que la somme de ces trois angles soit égale à deux angles droits. Lorsqu'une question admet ainsi une infinité de solution, on dit qu'elle est *indéterminée*.

253. En général, *pour construire un triangle, il faut connaître trois de ses parties, au nombre desquelles il doit y avoir au moins un côté.*

XIII.

254. **Problème**. *Fig.* 9. *Étant donnés le côté* a, *l'angle* B *et l'angle* C, *construire le triangle.*

Solution. 1° On fera le côté BC égal à *a*; 2° on

construira aux extrémités de BC des angles égaux aux angles donnés B et C, le reste sera déterminé. On connaîtra, par conséquent, l'angle A, le côté $b = AC$, le côté $c = AB$.

255. Il est évident que le problème ne serait pas possible si la somme des deux angles donnés B et C était égale ou plus grande que deux angles droits.

XIV.

256. **Problème**. *Fig.* 10. *Étant donnés le côté* a, *l'angle* B *et l'angle* A, *construire le triangle.*

Solution. 1° Sur l'un des côtés de l'angle B, on portera BC égal à *a*; 2° on construira où l'on voudra l'angle BA'C' égal à l'angle donné A; 3° on tracera la droite CA parallèle à C'A'.

257. On peut encore opérer de la manière suivante :

1° On cherchera le troisième angle en opérant comme au numéro 251, alors, connaissant l'angle A, l'angle C et le côté adjacent *b*, il ne restera plus qu'à opérer comme au numéro 255.

XV.

258. **Problème**. *Fig.* 11. *Étant donnés les côtés* a, b *et l'angle* C, *construire le triangle.*

Solution. 1° On fera CB égal à *a*; 2° à l'extrémité C de la droite CB, on fera un angle égal à l'angle donné C; 3° on fera CA égal à *b*; 4° l'on tracera le troisième côté AB.

Cette construction fera connaître l'angle A, l'angle B et le côté $c = AB$.

XVI.

259. **Problème**. *Fig.* 12. *Étant donnés les côtés* a, b *et l'angle* A, *opposé au côté* a, *construire le triangle.*

Solution. 1° On fera le côté AC égal à *b*; 2° on construira l'angle A à l'une des extrémités du côté AC; 3° du point C, comme centre, avec un rayon égal à *a*, on décrira l'arc de cercle BB′.

Les deux triangles ABC, AB′C, satisferont tous deux aux conditions du problème, puisque dans chacun d'eux on aura le côté AC = *b*, l'angle A adjacent au côté B, et le côté CB ou CB′ égal au côté donné *a*, sera opposé à l'angle A.

Dans le triangle ABC, le côté *c* est égal à AB, tandis que dans le triangle AB′C, il est égal à AB′.

260. Si le côté donné *a* était égal ou plus grand que AC, il n'y aurait qu'une seule manière de résoudre la question.

261. Il en serait de même si le côté donné *a* était précisément égal à la perpendiculaire abaissée du point C sur AB′, et le triangle ACB″, que l'on obtiendrait dans ce cas, serait rectangle au point B″.

262. Enfin, le triangle demandé serait évidemment impossible si le côté donné *a* était plus petit que la perpendiculaire CB″.

XVII.

263. **Problème**. *Fig.* 13. *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *construire le triangle.*

Solution. 1° On fera le côté BC égal à *a*; 2° du point B, comme centre avec un rayon BA égal à *c*, on décrira un arc *mn*; 3° du point C, comme centre avec un rayon CA égal à *b*, on décrira un arc *m′n′*. L'intersection des deux arcs *mn*, *m′n′*, déterminera le point A, que l'on joindra avec les points B et C.

On connaîtra donc les trois angles A, B, C.

264. Le triangle serait impossible si l'une des trois

droites données *a*, *b*, *c*, était égale ou plus petite que la somme des deux autres.

XVIII.

265. **Problème**. *Construction du triangle rectangle*.

Solution. Premier cas. *Si l'on donne un angle aigu et un côté*, on pourra toujours connaître le second angle aigu en prenant la différence du premier avec un angle droit, et la question reviendra au numéro 254.

266. Dans le cas où l'on donnerait *un angle aigu et le côté opposé*, on pourra encore opérer de la manière suivante, *fig*. 14 :

1° On fera l'angle aigu donné B; 2° par un point quelconque pris à volonté sur l'un des côtés de l'angle B, on élèvera la perpendiculaire A'C' égale au côté donné *b*; 3° on tracera la droite C'C parallèle au côté A'B; 4° on abaissera CA perpendiculaire sur AB, ce qui déterminera le triangle.

267. Deuxième cas. Si l'on donne *les deux côtés de l'angle droit*, cela revient au numéro 258.

268. Troisième cas. Si l'on donne *l'un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse*, on fera comme au numéro 259.

XIX.

269. **Problème**. *Construction du triangle isocèle*.

Solution. Premier cas. Si l'on donnait *un côté quelconque et l'un des angles*, on pourrait toujours connaître les autres angles, et la question reviendrait au numéro 254.

270. Dans le cas où l'on connaîtrait la base et l'angle du sommet, on pourrait opérer de la manière suivante, *fig*. 15 :

1° On construirait l'angle donné A ; 2° on le partagerait en deux parties égales par la droite AO ; 3° on construirait AC' égale à la base donnée *a*, et perpendiculaire sur AO ; 4° on tracerait C'C parallèle à AB ; 5° la droite CB, perpendiculaire sur AO, serait la base du triangle demandé.

271. Deuxième cas. Si l'on donnait *la base et l'un des côtés obliques*, il est évident que l'on connaîtrait les trois côtés, et l'on pourrait opérer comme au numéro 263.

272. Dans un triangle isocèle, on donne le nom de *sommet* au point de rencontre des deux côtés égaux. La *base* est le côté opposé au sommet, et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, se nomme l'*apothème*.

On donne également le nom d'*apothème* à la perpendiculaire abaissée du centre d'un polygone régulier sur le côté.

Ainsi, l'*apothème d'un polygone régulier* n'est autre chose que le rayon du cercle inscrit (209).

XX.

273. **Problème**. *Construction du triangle équilatéral.*

Solution. Il suffit pour cela de connaître un seul côté, avec lequel on opère comme au numéro 263.

XXI.

274. **Problème**. *Fig.* 16. *Construire un parallélogramme lorsque l'on connaît deux de ses côtés et l'angle qu'ils comprennent.*

Solution. L'angle A étant donné, on fera AB, AC, égaux aux deux côtés donnés ; puis on construira, par le point B, la droite BD parallèle au côté AC, et, par le point C, la droite CD parallèle au côté AB.

275. Si l'on donnait les deux côtés AB, AC et la dia-

gonale CB, on construirait successivement les deux triangles ABC, CBD, en opérant comme au numéro **263**.

XXII.

276. **Problème**. *Construire un carré dont on connait le côté.*

Solution. Il suffit de faire un parallélogramme dont les angles soient droits et les côtés égaux, ce qui ne peut offrir aucune difficulté; je me bornerai donc à indiquer, *fig.* 3, Pl. 6, une construction que l'on peut exécuter sans le secours du compas :

1° Après avoir fait coïncider l'hypoténuse de l'équerre isocèle CAB, avec le côté donné **1 — 2**, on posera la règle contre le côté AB.

2° On tournera l'équerre dans la position B′A′C′, et l'on tracera la diagonale **2 — 3**;

3° On fera glisser l'équerre sur la règle jusqu'à ce qu'elle soit arrivée en B″A″C″, et l'on tracera le côté **1 — 3**, ce qui déterminera le point **3**;

4° On amènera l'équerre jusqu'en B‴A‴C‴, et l'on tracera le côté **2 — 4**;

5° Enfin, on tournera l'équerre parallèlement à sa position primitive, et, lorsqu'elle sera parvenue dans la position C″A″B″, on tracera le dernier côté **3 — 4**.

Cette construction provient de ce que, dans l'équerre isocèle, l'hypoténuse fait deux angles égaux avec les côtés de l'angle droit, par conséquent l'angle **2 — 3 — 1** égal à A″B″C″, vaut un *demi-angle droit;* donc le triangle **1 — 2 — 3** est isocèle, et le quadrilatère **1 — 2 — 3 — 4** est évidemment un carré.

XXIII.

277. **Problème**. *Construire un polygone égal à un autre polygone donné.*

Solution. On pourra décomposer le polygone donné en triangles et construire ensuite, *fig*. 1, un même nombre de triangles égaux aux premiers, et placés de la même manière.

278. **2ᵉ solution.** Au lieu de décomposer les polygones en triangles, il vaut mieux opérer de la manière suivante : soit, *fig*. 2, le polygone donné BCDHK, 1° on tracera deux droites quelconques AX, A'X', dans le plan de la figure donnée;

2° De chacun des sommets de cette figure on abaissera une perpendiculaire sur la droite AX ;

3° On prendra toutes les parties A*p*, A*q*, A*s*, A*v*, A*m*, que l'on portera en A'*p*', A'*q*', A'*s*', A'*v*', *A*'*m*', sur la droite A'X';

4° Par les points *p*', *q*', *s*', etc., on élèvera une perpendiculaire à la droite A'X'; et l'on fera chacune de ces perpendiculaires égale en longueur à celle qui lui correspond sur la figure donnée.

Les sommets du nouveau polygone seront déterminés, et l'on n'aura plus qu'à tracer les côtés.

Il est facile de voir qu'en transportant la droite AX sur A'X', les deux figures coïncideraient dans toutes leurs parties, ce qui prouverait l'égalité des deux polygones.

279. **3ᵉ solution**. *Fig*. 4. 1° Par tous les sommets du polygone donné BCDHK, on tracera (242) des parallèles dans une direction quelconque; 2° on fera toutes ces lignes égales entre elles, et le polygone B'C'D'H'K', que l'on obtiendra en joignant les extrémités, sera évidemment égal au polygone donné.

280. **4ᵉ solution**. *Fig*. 5. 1° On tracera une droite quelconque AY, sur laquelle on abaissera des perpendiculaires de tous les sommets du polygone donné; 2° on prolongera chacune de ces perpendiculaires d'une quantité égale à elle-même.

Les deux polygones BCDHK, B'C'D'H'K', seront égaux,

car il est évident que l'on pourra les faire coïncider en pliant la figure suivant la droite AY.

281. Lorsque deux figures ont ainsi tous leurs points situés deux à deux sur des perpendiculaires à une même droite, et à égale distance de cette ligne, on dit qu'elles sont *symétriquement* placées.

La droite AY est ce que l'on appelle *un axe de symétrie.*

282. On dit souvent aussi qu'une figure est symétrique, lorsqu'elle se compose de deux parties égales placées symétriquement. Ainsi, le triangle isocèle est une figure symétrique, qui a pour axe de symétrie la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base (272).

Il y a des figures qui n'ont qu'un axe de symétrie, mais il y en a d'autres qui en ont plusieurs. Ainsi, dans un rectangle, il y a deux axes de symétrie qui passent par les milieux des côtés et par le point de rencontre des diagonales.

Dans un losange, les deux diagonales sont des axes de symétrie.

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie, qui sont les trois perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés.

Dans un polygone régulier, toute ligne droite qui passe par le centre et un sommet, ou par le centre et le milieu d'un côté, est un axe de symétrie.

Dans un cercle, chaque diamètre est un axe de symétrie.

XXIV.

283. Problème. *Fig.* 6. *Construire une tangente par un point* A *donné sur la circonférence d'un cercle.*

Solution. On joindra le point donné avec le centre par un rayon AO ; puis l'on construira la droite CD perpendiculaire sur AO.

284. Si l'on ne peut pas prolonger le rayon OA, on placera la pointe d'acier en A ; puis, avec un rayon égal à celui du cercle, on décrira l'arc *mn*, ce qui déterminera le point B sur la circonférence. De ce point, comme centre, avec le même rayon, on décrira l'arc *vu ;* on tracera ensuite la droite OB, que l'on prolongera jusqu'à son intersection avec l'arc *vu*. Le point C, que l'on obtiendra par cette construction, fera partie de la tangente cherchée.

En effet, les trois distances BO, BA, BC, étant égales, il s'ensuit que si du point B, comme centre, on décrivait un cercle avec le rayon BO, la circonférence passerait par les points A et C ; mais alors OC serait un diamètre, et l'angle OAC étant inscrit dans une demi-circonférence serait droit ; donc la ligne CA serait une tangente (186).

XXV.

285. **Problème**. *Construire une tangente à une circonférence, par un point situé en dehors du cercle.*

Solution. *Fig.* 6. 1° On joindra le point donné T avec le centre O ; 2° on décrira un cercle en prenant la droite TO comme diamètre. Les points H et K, suivant lesquels ce second cercle rencontrera le premier seront deux *points de contact*.

En effet, si l'on trace les droites TH, TK, OH, OK, il est évident que les angles THO, TKO, seront droits, puisque chacun d'eux sera inscrit dans une demi-circonférence ; donc les droites TH, TK, seront tangentes au cercle.

286. **2e solution**. *Fig.* 6. 1° Du point O, comme centre, avec un rayon égal au diamètre du cercle donné, on décrira les deux arcs *mn, m'n' ;* 2° du point donné, comme centre, avec le rayon TO, on décrira les arcs *vu, v'u'*, ce qui déterminera les points S et I. On joindra ces points avec le point O par les droites OS, OI, ce qui déterminera les points de tangence H et K.

En effet, le triangle STO est isocèle, puisque TO = TS; de plus, la droite OS étant égale au diamètre du cercle donné, le point H est le milieu de SO ; donc la droite TH est perpendiculaire sur OH, puisqu'elle passe par le sommet et par le milieu de la base du triangle STO (142).

XXVI.

287. **Problème**. *Construire deux tangentes parallèles à une droite donnée.*

Solution. *Fig.* 7. On tracera le diamètre CD perpendiculaire sur la droite donnée AB, les extrémités de ce diamètre seront évidemment les points de tangence demandés.

Si l'on voulait construire des tangentes perpendiculaires à la droite AB, on tracerait le diamètre HK parallèle à AB, ce qui déterminerait les points de tangence H et K.

XXVII.

288. **Problème**. *Construire un polygone régulier lorsque l'on connaît le rayon du cercle circonscrit.*

Solution. On commencera par décrire la circonférence, que l'on partagera ensuite en autant de parties égales qu'il doit y avoir de côtés dans le polygone demandé (203).

289. **Remarque**. Il y a des subdivisions que l'on peut faire à l'aide des principes précédemment démontrés, mais il y en a d'autres dont nous ne pourrons parler que plus tard.

XXVIII.

290. **Problème**. *Construire le carré inscrit dans un cercle donné.*

Solution. *Fig.* 8. On construira deux diamètres AB,

CD, perpendiculaires l'un à l'autre, et l'on joindra les extrémités de ces diamètres par des cordes, ce qui donnera le carré ADBC; car, les angles au centre étant égaux, comme *droits*, les arcs interceptés entre les côtés seront égaux (188), et la circonférence sera partagée en quatre parties égales.

291. **Corollaire**. En opérant comme nous l'avons dit au numéro 235, on déterminera le rayon OH qui partage l'angle AOD, et, par conséquent, l'arc AD en deux parties égales, de sorte que la corde AH sera le côté de l'*octogone régulier inscrit*.

Si l'on partage l'arc AH en deux parties égales, on aura a seizième partie de la circonférence.

En continuant de la même manière, on pourra inscrire dans le cercle tous les polygones de 4, 8, 16, 32, 64, *côtés*, et ainsi de suite, en doublant toujours.

XXIX.

292. **Problème**. *Construire l'hexagone régulier inscrit dans un cercle donné.*

Solution. *Fig.* 9. Si du point A, comme centre, on décrit l'arc OB, on déterminera le point B, et l'arc AB sera la *sixième partie* de la circonférence.

En effet, si l'on trace les droites OB, AB, le triangle AOB sera équilatéral, par conséquent, l'angle AOB vaudra le *tiers de deux angles droits* ou le *sixième de quatre*; d'où il s'ensuit que l'arc intercepté AB sera la sixième partie de la circonférence entière. Ainsi, *le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.*

293. **Corollaire** I. Si, après avoir déterminé les sommets de l'hexagone régulier, on joint les trois points A, C, E, par des cordes, on aura, inscrit dans le cercle, un

triangle équilatéral, car les arcs AC, CE, EA, sont égaux, puisque chacun d'eux vaut *deux sixièmes* ou *un tiers* de la circonférence.

294. **Cor.** II. En partageant en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone régulier, on aura les sommets du *dodécagone régulier inscrit* ou *polygone régulier de* 12 *côtés;* puis, en continuant de la même manière, on pourra inscrire les polygones de 24, 48, 96, côtés, etc.

295. **Cor.** III. L'angle AOI, moitié de AOB vaut $\frac{1}{3}$ d'angle droit.

En déterminant le milieu de l'arc AI, on aurait la *sixième* partie de l'angle droit, et l'on pourrait ainsi, en continuant, le partager en 12, 48 parties, etc.

XXX.

296. **Problème**. *Construire un polygone régulier lorsque l'on connaît le rayon du cercle inscrit.*

Solution. La question revient encore à partager la circonférence en autant de parties égales qu'il doit y avoir de côtés dans le polygone demandé. Après quoi il ne reste plus qu'à construire une tangente par chacun des points de division. Ainsi, par exemple, si l'on voulait construire un hexagone régulier circonscrit, on déterminerait les sommets de l'hexagone inscrit (292), et l'on construirait une tangente par chacun de ces sommets, ou parallèlement à chacun des côtés du polygone inscrit.

Il sera utile de s'assurer que les points de rencontre des tangentes sont situés sur les prolongements des rayons qui passent à égale distance des points de tangence.

XXXI.

297. **Problème**. *Construire un polygone régulier dont on connaît le côté.*

Solution. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire un octogone régulier dont le côté serait égal à AB, *fig.* 10, 1° on décrira un cercle quelconque, et l'on partagera la circonférence en huit parties égales (291); 2° on tracera la corde AC, sur laquelle on portera A'B' égal au côté donné AB; 3° on construira B'B parallèle au rayon AO, ce qui déterminera le point B sur le rayon AC; 4° on décrira la circonférence du cercle qui a pour rayon OB, et les points où cette circonférence rencontrera les rayons qui passent par les points de division du premier cercle, seront évidemment les sommets du polygone demandé.

298. **Remarque**. Les polygoues réguliers peuvent être combinés d'un grand nombre de manières pour former des parquets, des mosaïques et autres figures d'ornement. La seule condition à laquelle il faut satisfaire, c'est que la somme de tous les angles qui ont un sommet commun, doit être égale à 4 angles droits. Ainsi, par exemple, on pourra réunir autour d'un même point :

6 *Angles de triangles équilatéraux*,

4 *Angles de carrés ou de rectangles*,

3 *Angles d'hexagones réguliers*,

2 *Angles d'octogones avec* 1 *angle de carré*,

2 *Angles d'hexagones réguliers avec* 2 *angles de triangles équilatéraux*, etc.

On peut encore composer un grand nombre de figures en réunissant des triangles isocèles, des losanges, des cercles et des tangentes, placées par rapport à ces cercles, dans toutes les conditions possibles de symétrie et de régularité.

Je laisserai au lecteur le soin de s'exercer à la recherche de toutes ces combinaisons, et à la construction des figures qui en résultent.

XXXII.

299. **Probleme**. *Fig.* 11. *Construire un cercle, ou un arc de cercle, passant par deux points donnés* A, B.

Solution. On tracera la droite AB, par le milieu de laquelle on construira la perpendiculaire CD. Chaque point de cette perpendiculaire pourra être pris pour le centre d'un cercle dont la circonférence contiendra les points donnés.

Le plus petit de tous ces cercles aura son centre au point O, et son rayon sera OB, moitié de la droite AB.

Si, au contraire, on éloigne le centre, le rayou augmentera, la courbure diminuera et l'arc AB se rapprochera de sa corde; enfin, si l'on supposait que le centre fût infiniment loin, il faudrait admettre que le rayon serait infiniment grand, alors la courbure serait nulle et l'arc se confondrait avec la corde. C'est pourquoi on dit quelquefois qu'*une ligne droite est un arc de cercle dont le rayon est infini*.

XXXIII.

300. **Problème**. *Construire un cercle ou un arc de cercle par trois points donnés* A, B, C, *fig.* 12.

Solution. On tracera les deux droites AB, BC, et, par le milieu de chacune d'elles, on construira une perpendiculaire. Le point O, suivant lequel se rencontreront ces deux perpendiculaires, sera le centre du cercle demandé.

En effet, les droites OA, OB, sont égales entre elles, puisqu'elles s'écartent également de la perpendiculaire OM (138). Les droites OB, OC, sont aussi égales entre elles, parce qu'elles s'écartent également de la perpendiculaire

ON; donc le point O, étant à égale distance des trois points donnés, sera le centre du cercle qui passerait par ces points.

301. **Corollaire** I. Si les points donnés étaient en ligne droite, les deux perpendiculaires OM, ON, seraient parallèles, et le centre étant infiniment loin, la courbure du cercle serait nulle (299).

302. **Cor.** II. La construction précédente peut évidemment servir pour retrouver le centre d'un cercle ou d'un arc de cercle. Dans ce cas, on choisira les trois points à volonté sur l'arc ou sur la circonférence donnés.

303. **Cor.** III. En opérant comme ci-dessus, on pourra toujours faire passer une circonférence par les trois sommets d'un triangle donné.

304. **Cor.** IV. Trois points suffisant pour déterminer le centre et le rayon, on ne pourra pas faire passer une circonférence par un plus grand nombre de points *pris à volonté*.

305. **Cor.** VI. On pourra faire passer une circonférence par les sommets d'un quadrilatère toutes les fois que la somme des angles opposés sera égale à deux angles droits.

En effet, admettons que dans le quadrilatère ABCI, *fig.* 12, on ait

l'angle $ABC + AIC = 2$ angles droits,

si l'on prolonge CI jusqu'à la circonférence, et que l'on trace AK, on aura (200)

l'angle $ABC + AKI = 2$ angles droits.

Retranchant cette équation de celle qui précède, on obtient $AIC - AKI = 0$;

mais on a (110)

$$AKI + KAI = AIC.$$

Ajoutant et réduisant, il vient

$$KAI = 0.$$

Donc la droite AI ne peut pas différer de AK, et le

point I doit appartenir à la circonférence qui passe par les trois points A, B, C.

XXXIV.

306. **Problème.** *Construire un cercle passant par tous les sommets d'un polygone régulier.*

Solution. Il suffira de chercher le centre du cercle qui passe par trois quelconques des sommets (154).

On pourra obtenir ce centre en opérant comme au numéro 300; mais on pourra aussi le déterminer par l'intersection de deux diamètres, que l'on construira en joignant deux sommets opposés lorsque le nombre des côtés du polygone sera pair, *fig.* 13, ou bien en joignant un sommet avec le milieu du côté opposé, si le nombre des côtés est impair, *fig.* 14.

XXXV.

307. **Problème.** *Fig.* 1, Pl. 7. *Sur une droite donnée* AB, *construire un segment capable d'un angle donné* PMQ.

On dit qu'un segment est capable d'un angle donné, lorsque tous les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle dont il s'agit.

Solution. 1° On tracera la droite MH, ce qui déterminera l'angle PMH, complément de PMQ; 2° on fera au point A un angle OAK égal à PMH; 3° on construira la droite VS perpendiculaire au milieu de AB; l'intersection de VS avec AO sera le centre du cercle auquel appartient le segment demandé.

En effet, les deux angles OAK, HMP, étant égaux par construction, leurs compléments seront aussi égaux; ce qui donnera $AOK = PMQ$;

mais on a $\frac{AOB}{2} = AOK$,

de plus (190), $AXB = \frac{AOB}{2}$.

Ajoutant et réduisant, on aura

$$AXB = PMQ.$$

Ainsi, tout angle inscrit dans le segment AXB, est égal à l'angle donné PMQ.

308. L'angle BAI, formé par la tangente AI, est aussi égal à l'angle donné, puisque l'on a (195)

$$BAI = \frac{AOB}{2} = AOK = PMQ.$$

309. Si l'on demandait le segment capable de l'angle obtus PMQ', la construction serait la même, mais alors, c'est le segment AYB, qui satisferait aux conditions du problème.

En effet, puisque les angles AXB, PMQ, sont égaux, leurs suppléments (199) AYB, PMQ', doivent aussi être égaux; par conséquent, tous les angles inscrits dans le segment AYB, sont égaux à l'angle obtus PMQ'.

310. Si la surface sur laquelle on dessine ne contenait pas le centre du cercle, *fig.* 2, on construirait sur AB, une suite de triangles ACB, AC'B, etc., dans chacun desquels la somme des angles à la base serait égale au supplément de l'angle donné.

La construction de tous ces triangles pourra se faire très-rapidement, en opérant de la manière suivante :

1° On tracera les deux droites HA, KB, de manière que chacun des deux angles HAB, KBA, soit égal au supplément de l'angle donné DAH; 2° on partagera les angles HAB, KBA, en 4, 8, ou 16 parties égales, suivant le nombre de points que l'on voudrait obtenir, et si l'on suppose, par exemple, que chacun de ces angles soit partagé en 4 parties égales, par les droites 1, 2, 3, et 1', 2', 3', les points de l'arc de cercle demandé seront déterminés

par les intersections de la droite 1 avec 3′, de 2 avec 2′, de 3 avec 1.

En effet, si nous exprimons par m le quart de l'un quelconque des deux angles HAB, KBA, il est évident que dans les triangles ACB, AC′B, AC″B, la somme des angles à la base sera

$$3m + m = 2m + 2m = m + 3m = 4m = \text{HAB},$$

supplément de l'angle donné.

Donc la somme des angles, à la base de chaque triangle, étant égale à l'angle HAB, tous les angles, aux sommets de ces triangles, seront égaux à l'angle donné DAH. Ils seront inscrits dans un même segment, et les points C, C′, C″, seront situés sur un arc de cercle.

311. La somme des angles, à la base des triangles inscrits, étant une quantité constante, il s'ensuit que si l'on faisait tourner le côté CA, l'angle, au point A, augmenterait à mesure que celui du point B diminuerait, et lorsque ce dernier angle serait réduit à zéro, l'angle du point A vaudrait $4m$; alors, le point C étant infiniment rapproché du point A, la sécante A — 3 serait remplacée par AH, qui alors serait une tangente à l'arc AC′B. Il en sera de même de la droite KB.

Lorsque l'on construit ainsi, à la main, une courbe passant par des points déterminés, il est fort utile de connaître d'avance un certain nombre de tangentes, parce que cela facilite le tracé de la courbe, en indiquant sa direction dans le voisinage des points de tangence. Or, si l'on voulait construire la tangente au point C, il suffirait de faire l'angle SCA = CBA, ou VCB = CAB: car si l'on conçoit les deux rayons AO, CO, et la droite OI, perpendiculaire sur AC, on aura (190)

l'angle $$\text{CBA} = \frac{\text{COA}}{2},$$

mais nous avons par construction

$$\text{SCA} = \text{CBA}.$$

Ajoutant et réduisant, il vient

$$SCA = \frac{COA}{2}.$$

Or, $$\frac{COA}{2} = COI;$$

de plus, $COI + ICO = 1$ angle droit.

Ajoutant et réduisant, il vient

$$SCA + ICO = 1 \text{ angle droit};$$

d'où SCO 1 angle droit.

Par conséquent la droite CS est une tangente, puisqu'elle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OC.

On pourra donc construire d'avance autant de tangentes que l'on voudra.

La tangente au point C' serait parallèle à la corde AB.

312. **2ᵉ Solution**. On peut fixer solidement deux règles AM, BM, *fig.* 4, de sorte que l'angle AMB, soit égal à l'angle donné. Si ensuite on fait glisser cet angle sur le papier, de manière que ses côtés passent toujours par les extrémités de la ligne donnée AB, le point M décrira évidemment l'arc demandé.

Au lieu d'employer deux règles, on peut découper l'angle A''M''B'', *fig.* 3, dans une planche mince ou dans une feuille de carton.

313. **Corollaire**. L'une quelconque des constructions précédentes, peut servir à tracer un arc de cercle par trois points donnés, lorsque le centre du cercle n'est pas situé sur la planche à dessin.

XXXVI.

314. **Problème**. *Fig.* 5. *Construire un cercle tangent en un point* A *d'une droite donnée* BC.

Solution. On construira, par le point A, la droite DE, perpendiculaire sur BC. Chaque point de DE sera le centre d'un cercle tangent à la droite BC (186).

Si l'on éloigne le centre, la courbure diminue et la circonférence se rapproche de la tangente, avec laquelle elle se confond lorsque le rayon est infiniment grand.

XXXVII.

315. **Problème.** *Fig.* 6. *Construire un cercle tangent à deux droites données* AB, AC.

Solution. On construira la droite HD, qui partage l'angle BAC en deux parties égales; chaque point de HD sera le centre d'un cercle tangent aux deux droites données. Les perpendiculaires abaissées du centre sur les deux droites AB, AC, détermineront les points de tangence.

En effet, si l'on choisit le point O pour centre du cercle que l'on veut construire, et que l'on abaisse les deux perpendiculaires OB, OC, on aura l'angle CAO = OAB par construction, l'angle ACO = ABO comme droits; par conséquent le troisième angle AOB = AOC; de plus, les deux triangles AOB, AOC, ont un côté commun; donc ils sont égaux (145); d'où l'on peut conclure que les deux perpendiculaires OB, OC, sont égales. Ainsi, le cercle qui aura le point O pour centre, et la droite OB pour rayon, passera par le point C, et les droites AB, AC, seront tangentes, puisque chacune d'elles sera perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.

316. La droite MN, qui partage l'angle CAK en deux parties égales, contient les centres d'une seconde série de cercles qui toucheraient encore les deux droites données.

Les deux droites HD, MN, sont perpendiculaires l'une à l'autre, car on a l'angle

$$\text{MAC} + \text{CAO} = \frac{\text{KAC}}{2} + \frac{\text{CAB}}{2} = \frac{\text{KAC} + \text{CAB}}{2} =$$

$$= \frac{2 \text{ angles droits}}{2} = 1 \text{ angle droit.}$$

317. **Corollaire** I. *Fig.* 8. Si les droites données BA′, CA″, ne se rencontrent pas sur la planche à dessin, on pourra opérer de la manière suivante :

1° Par un point B, pris à volonté, on construira BS perpendiculaire sur BA′, et BK perpendiculaire sur CA″; 2° on tracera la droite BC, qui partage l'angle KBS en deux parties égales; 3° on construira la droite HD perpendiculaire au milieu de BC.

En effet, le triangle CKB étant rectangle, on a l'angle

$$A''CO + OBK = 1 \textit{ angle droit};$$

mais la droite BS étant perpendiculaire sur BA′, on a

$$1 \textit{ angle droit} = OBA' + OBS;$$

de plus, $OBS = OBK$ par construction.

Ajoutant les trois équations et réduisant, on obtient l'angle $A''CO = OBA'$.

Par conséquent, le triangle formé par les trois droites CA″, BA′ et BC, est isocèle. Le sommet de ce triangle, étant à égale distance des points B et C, doit donc nécessairement appartenir à la perpendiculaire HD, élevée par le milieu de la base BC.

Enfin, les deux angles A″CO, OBA′, étant égaux, leurs compléments le sont aussi ; d'où l'on peut conclure que la droite HD partage en deux parties égales l'angle que les droites BA′, CA″, formeraient à leur point de rencontre.

318. **Cor.** II. *Fig.* 7. Si le centre du cercle que l'on veut tracer n'est pas sur le dessin, on commencera par choisir à volonté les points de tangence B et C, qui doivent être à égale distance du point A (202), et par conséquent sur une droite BC, perpendiculaire à la ligne AD, qui partage en deux parties égales l'angle BAC.

On partagera l'angle SBC, en deux parties égales, par une droite BU, dont l'intersection avec AD déterminera le point U appartenant à l'arc demandé.

En effet, on a, par construction,

l'angle SBU = UBD;

mais UBD = SUB, comme alternes-internes.

Ajoutant les deux équations et réduisant, on obtient

SBU = SUB;

donc le triangle SUB est isocèle, et l'arc de cercle tangent au point B, sera également tangent en U (202).

En continuant de la même manière, on aura autant de points que l'on voudra. Ainsi, en partageant chacun des angles SBU, USB, en deux parties égales, on obtiendra le point I.

La droite KH, perpendiculaire sur SI, sera tangente au cercle demandé, car la ligne SI doit passer par le centre, puisqu'elle partage l'angle USB en deux parties égales.

XXXVIII.

319. **Problème**. *Fig.* 10. *Construire un cercle tangent à trois droites données* AB, AC, BC.

Solution. On partagera chacun des angles ABC, BAC, en deux parties égales, et le point O, suivant lequel se rencontreront les deux bissectrices, sera le centre du cercle demandé. Les points de tangence seront déterminés en abaissant les trois perpendiculaires OK, OS, OI. En effet, les deux triangles AOK, AOS, étant égaux (315), on a OK = OS; mais l'égalité des triangles BOS, BOI, donnera pareillement OS = OI; donc les trois perpendiculaires OK, OS, OI, étant égales, le cercle qui serait décrit du point O comme centre, avec l'une d'elles pour rayon, passera nécessairement par les pieds des deux autres, et sera tangent aux trois côtés du triangle, dans lequel, par conséquent, il sera inscrit.

320. **Corollaire** I. Si l'on trace la droite OC, les deux

triangles OCK, OCI, seront égaux, car ils auront les trois côtés égaux chacun à chacun; savoir, OC commun, OK = OI, comme rayon d'un même cercle, et les deux tangentes CK = CI (202); donc l'angle OCK = OCI; d'où il faut conclure que la troisième bissectrice passe également par l'intersection des deux autres.

321. COR. II. Indépendamment du cercle inscrit dans le triangle ABC, il y a encore trois autres cercles qui satisfont à la question. Si l'on partage en parties égales les angles que chacun des côtés du triangle fait avec le prolongement du côté adjacent, les intersections des trois bissectrices HV, VU, UH', donneront trois points qui seront les centres de ces trois cercles. On pourra s'assurer, comme vérification, que le point V, suivant lequel se rencontrent les deux droites UV, HV, est dans le prolongement de la bissectrice BO. Pareillement le point U est dans le prolongement de AO, et si l'on prolongeait la bissectrice CO, elle passerait par le point de rencontre des deux lignes VH, UH'. Cette remarque est la conséquence du corollaire précédent.

322. COR. III. *Fig.* 10. On peut facilement obtenir les points de tangence sur les droites données VB, BD, DU, sans employer le centre du cercle. En effet, concevons BC perpendiculaire sur la droite qui partagerait l'angle BAC en deux parties égales, le triangle BAC sera isocèle et l'on aura
$$AC = AB.$$
Or, si nous exprimons les points de tangence par V, I, U, nous aurons (202)
$$AB + BV = AC + CD + DU,$$
$$BI = BV,$$
$$DU = DI.$$
Ajoutant ces trois équations avec celle qui précède, il viendra
$$BI = DI + CD;$$
mais
$$BI + DI = BD.$$

Ajoutant et réduisant, on aura

$$2BI = BD + CD;$$

d'où

$$BI = \frac{BD + CD}{2}.$$

Ainsi, en décrivant l'arc CC' du point D, comme centre, on aura $BC' = BD + DC' = BD + DC$, et le point I, milieu de BC', sera l'un des points de tangence demandés.

Les deux autres points de tangence seront déterminés par les arcs IV, IU, décrits des points B et D comme centres.

323. **Cor**. IV. Les deux termes AB, AC, ayant disparu par les réductions, il est évident qu'ils ne sont pas nécessaires pour la construction de la figure; et si le point A n'était pas sur la planche à dessin, on construirait la droite BC en opérant comme nous l'avons dit au numéro 317. Ainsi, *fig.* 11, après avoir construit BS perpendiculaire sur VB, et BK perpendiculaire sur UD, on partagera l'angle SBK en deux parties égales, ce qui donnera la droite BC, on décrira l'arc CC' et l'on prendra la moitié de BC', ce qui déterminera le point I.

324. **Cor**. V. Lorsqu'on a obtenu les trois points de tangence, on peut construire le cercle par l'un des moyens indiqués aux numéros 310 et 318.

Toutes ces constructions d'arcs de cercle dont on n'a pas le centre, et qui doivent être tangents à des lignes données, ou passer par des points donnés, sont souvent utiles pour les raccordements d'alignements dans le tracé des routes et des chemins de fer, c'est pourquoi j'ai cru devoir traiter la question avec quelques développements.

325. **Cor**. VI. Tout ce que nous avons fait au numéro 322, pour déterminer les points de tangence, peut être appliqué au cercle inscrit dans l'intérieur du triangle, *fig.* 9; mais dans ce cas on a presque toujours le centre, et la question n'offre plus le même intérêt.

XXXIX.

326. **Problème**. *Inscrire un cercle dans un quadrilatère.*

Solution. Pour que la question soit possible, il faut que les côtés opposés, ajoutés deux à deux, forment des sommes égales.

En effet, dans le quadrilatère circonscrit BMND *fig.* 12, on a (202)

$$BV = BI,$$
$$VM = MP,$$
$$DU = DI,$$
$$UN = PN.$$

Ajoutant ces équations, on a

$$(BV + VM) + (DU + UN) = (BI + DI) + (MP + PN);$$

d'où
$$BM + DN = BD + MN.$$

327. Réciproquement, *si dans un quadrilatère, les côtés opposés, ajoutés deux à deux, forment des sommes égales, on pourra faire passer un cercle par les quatre sommets.* En effet, admettons que l'on ait.

$$BD + MZ = BM + DZ,$$

et supposons que le cercle tangent aux trois droites MB, BD et DZ, coupe le quatrième côté MZ, on pourrait construire la tangente MN, et l'on aurait alors (326)

$$BM + DZ + ZN = BD + MN.$$

Ajoutant les deux équations et réduisant, il viendrait

$$MZ + ZN = MN,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si NZ est nul, et dans ce cas le quatrième côté du quadrilatère se confondrait avec MN, et serait par conséquent tangent au cercle qui touche les trois côtés MB, BD et DN.

Si les conditions énoncées (327) ont lieu, il ne reste plus qu'à construire le cercle tangent à trois côtés quelconques du quadrilatère donné (319).

XL.

328. **Problème**. *Inscrire un cercle dans un polygone régulier.*

Solution. On déterminera le centre par l'un des moyens indiqués au numéro 306, puis on construira l'apothème qui sera le rayon du cercle cherché (272).

On fera bien de s'assurer que les points de tangence sont exactement au milieu des côtés.

XLI.

329. **Problème**. *Construire une droite tangente à deux cercles donnés.*

Solution. Nous remarquerons d'abord, *fig.* 1, Pl. 8, que l'on peut en général construire quatre droites qui satisfont à la question proposée. Ces droites se rencontrent deux à deux sur la ligne des centres.

Nous nommerons *tangentes externes* celles qui touchent les cercles donnés en deux points situés du même côté par rapport à la ligne des centres, et *tangentes internes,* lorsque les deux points de tangence sont de côtés différents.

330. *Construction des tangentes externes, fig.* 2. 1° Du point O comme centre, avec un rayon OM égal à la *différence* des rayons des deux cercles donnés, on décrira la circonférence MCN; 2° on construira (285) les deux droites AM, AN, tangentes à cette circonférence; 3° on tracera les deux rayons OH, AK, perpendiculaires à la tangente AM, et les deux rayons OV, AU, perpendiculaires sur AN. Les points K et H détermineront la tangente HK, et les points U et V détermineront la tangente VU. En effet, OM étant la différence des rayons des deux

cercles donnés, il s'ensuit que HM = AK. De plus, ces deux lignes, perpendiculaires sur AM, sont parallèles, et le quadrilatère AKHM est un parallélogramme (151); donc les rayons AK, OH, perpendiculaires sur AM, sont également perpendiculaires sur la droite KH, qui par conséquent est une tangente commune aux deux circonférences données. Il en sera de même de la droite UV.

331. *Construction des tangentes internes*, *fig.* 3. 1° On décrira du point O la circonférence MCN avec un rayon OM égal à la *somme* des rayons des deux cercles donnés; 2° on construira les deux droites AM, AN, tangentes à la circonférence MCN; 3° on tracera les deux rayons OM, AK, perpendiculaires sur AM, et les rayons ON, AU, perpendiculaires sur VU, les droites KH, UV, seront les tangentes demandées.

On le prouverait en raisonnant comme ci-dessus.

332. Si les deux cercles étaient égaux, il est évident que les tangentes externes seraient parallèles.

333. On pourrait encore considérer les tangentes externes comme parallèles, si les deux cercles étaient infiniment éloignés, parce qu'alors le point de rencontre de ces deux tangentes serait lui-même reculé jusqu'à l'infini (70).

334. Si au contraire les deux cercles se rapprochaient, *fig.* 4, l'angle formé par les deux tangentes, augmenterait, et lorsque les deux cercles se toucheraient, les deux tangentes internes seraient réduites à une seule PQ, les quatre points de tangence U, K, H, V, seraient réunis au point C, qui serait alors le point de tangence des deux cercles. Dans ce cas il n'y aurait plus que trois tangentes.

335. Lorsque les deux cercles se coupent, *fig.* 5, les tangentes internes ne sont plus possibles, et les tangentes externes existent seules.

336. Enfin, si l'on rapproche encore les centres jusqu'à ce que les deux cercles se touchent intérieurement, il ne

peut plus y avoir qu'une seule tangente, qui elle-même cesse d'exister au moment où le petit cercle est entièrement compris dans le grand sans le toucher.

XLII.

337. **Problème**. *Construire deux arcs de cercles qui se raccordent en un point donné* B, *fig.* 6.

Solution. On dit que deux arcs de cercle se raccordent, lorsqu'ils paraissent appartenir à une même courbe et qu'ils ne font entre eux aucun angle (215), aucune brisure, à l'endroit où ils se réunissent. Ainsi, les deux arcs AB et BC se raccordent et forment entre eux la courbe à *deux centres* ABC.

Les deux arcs DB et BH se raccordent également au point B, et forment ensemble la courbe à deux centres DBH.

Toutes les questions dans lesquelles on se propose de raccorder ainsi deux ou un plus grand nombre d'arcs de cercles, dépendent de ce principe démontré au numéro 212, que *deux cercles sont tangents l'un à l'autre lorsqu'ils ont une tangente commune, et dans ce cas la ligne des centres doit contenir le point de tangence.* Ainsi, les arcs AB et BC, DB et BH, se raccordent au point B, parce qu'ils appartiennent à des cercles dont les centres sont situés sur la droite KO, perpendiculaire à la tangente commune MN.

338. Les raccordements d'arcs de cercles sont fréquemment employés dans l'architecture pour le tracé des profils de moulures, pour la construction des cintres de voûtes; ils servent encore pour décrire un grand nombre de courbes en usage dans les machines.

Nous terminerons cette première série de problèmes par la solution de deux questions principales sur les courbes à plusieurs centres.

XLIII.

339. **Problème**. *Construire une courbe à plusieurs centres passant par des points donnés.*

Solution. Soient trois points A, B, C, *fig.* 7. On tracera les cordes AB, BC et les droites DM, HN, perpendiculaires sur les milieux de ces cordes ; puis, du point M, pris où l'on voudra sur DM, on décrira un premier arc AB. Quand au second arc BC, il doit avoir son centre sur la ligne HN, perpendiculaire au milieu de BC ; mais, pour qu'il se raccorde au point B avec le premier arc, il faut qu'ils aient en ce point, une tangente commune. Il faut donc que le centre du second arc soit situé sur le rayon BM (212). Or, le centre du second arc devant appartenir en même temps aux deux droites HN et BM, il sera situé au point N, suivant lequel ces deux lignes se rencontrent.

340. La question est évidemment indéterminée, et l'arc que l'on obtient dépend du point que l'on choisit pour centre du premier arc.

341. Si l'on plaçait le premier centre au point O, suivant lequel se rencontrent les droites DM et HN, les deux arcs n'en feraient qu'un seul.

342. Si l'on prenait pour centre du premier arc le point I, suivant lequel la droite DM est rencontrée par BI, perpendiculaire à BC, le second centre serait situé à l'infini, et l'arc correspondant serait alors remplacé par la droite BC, tangente au premier arc.

343. **Corollaire**. On peut appliquer ces principes à la construction d'une courbe passaut par autant de points que l'on voudra, et l'on reconnaîtra encore que la forme de la courbe dépend du point que l'on choisit pour centre du premier arc. Ainsi, *fig.* 8, en prenant le premier centre

au point 1, on obtient la courbe AVMUD, tandis que si l'on prend le premier centre au point 1', on obtiendra la courbe ASKHD.

344. Pour éviter l'inconvénient qui résulte de cette indétermination, on commence, *fig.* 9, par esquisser au crayon la courbe que l'on veut construire, après quoi on choisit les points de raccordement assez rapprochés pour que les parties de courbe comprises entre ces points, soient sensiblement circulaires, et l'on détermine ensuite les centres comme ci-dessus.

345. Le nombre des centres est toujours inférieur d'une unité à celui des points par lesquels on veut faire passer la courbe.

XLIV.

346. Problème. *Construire une courbe à plusieurs centres et tangente à des droites données.*

Solution. Soient les deux droites AB, AC, *fig.* 10. On veut construire une courbe à deux centres, qui touche la première droite au point B et la seconde au point C. On tracera d'abord les deux droites BO, CI, perpendiculaires aux deux tangentes données, puis on décrira un premier arc BD, en prenant pour centre un point O, situé où l'on voudra sur la droite BO. On portera le rayon BO de C en H sur la droite CI, puis on joindra le point O avec le point H par la droite OH, sur le milieu de laquelle on élèvera la perpendiculaire SI. L'intersection de la droite SI avec CI déterminera le point I, qui sera le centre du second arc de cercle. Le point de raccordement sera déterminé en prolongeant IO jusqu'en D.

En effet, on a (140) IH = IO, et par conséquent

$$IH + HC = IO + OD.$$

puisque OD = OB = HC : donc, le second arc tangent au point C passera par le point D. De plus, les deux arcs

se raccorderont au point D, puisque si l'on menait en ce point une perpendiculaire sur OD, rayon de BD, elle serait aussi perpendiculaire sur DI, rayon de CD; d'où il suit, que les deux arcs auraient au point D une tangente commune, et que par conséquent ils se toucheraient en ce point.

347. On aurait pu commencer par décrire l'arc CD, mais alors, il aurait fallu porter le rayon CI de B en H', après quoi on aurait tracé la droite IH', sur le milieu de laquelle on aurait élevé la perpendiculaire S'O, dont la rencontre avec BH' aurait donné le point O pour centre de l'arc BD

348. La question précédente est encore indéterminée, et la forme de la courbe dépend du premier centre. Si l'on prenait ce point sur la droite qui partage l'angle BAC en deux parties égales, le premier arc toucherait la droite BC en un point M, éloigné du point A d'une quantité AM = AB, et la partie droite MC remplacerait le second arc, dont le rayon serait alors infini.

Si au lieu de porter le premier rayon de C en H, on l'eût porté de C en H", *fig.* 11, on aurait obtenu la courbe BD'NC. Le second centre aurait été en I', et le point de raccordement en D'.

On peut varier ainsi à l'infini la forme de la courbe, en changeant la place des centres et la direction des rayons.

349. Si les deux tangentes BA, CA', *fig.* 12, étaient parallèles, cela ne changerait rien à la manière d'opérer.

350. **corollaire.** On pourrait se proposer d'inscrire une courbe à plusieurs centres dans un polygone donné ABCD, *fig.* 13.

Supposons que l'on ait choisi les points de tangence A, M, D, on pourra joindre le point A avec M par une première courbe à deux centres AM, et les points M et D par

une deuxième courbe MD, ce qui ferait quatre centres.

351. On peut n'employer que trois arcs de cercle ayant pour centre les points 1, 2 et 3, et se raccordant aux points Z et K ; enfin, on peut commencer par l'arc que l'on voudra, et même par celui du milieu si on le trouve plus commode : c'est ce que l'on a fait sur la figure 13.

LIVRE DEUXIÈME.

LIGNES PROPORTIONNELLES ET FIGURES SEMBLABLES.

CHAPITRE PREMIER.

Rapports et Proportion des Lignes.

I.

352. **Rapport numérique**. Le *rapport* de deux quantités est le nombre de fois que l'une d'elles contient l'autre.

Il résulte de là, qu'un rapport est toujours un *nombre*. Cependant il arrive souvent, dans l'énoncé d'un principe ou dans le cours d'une démonstration, que l'on exprime un rapport par des lettres; c'est pourquoi on donne plus particulièrement le nom de *rapport numérique* à celui qui est exprimé en chiffres.

353. Le plus simple de tous les rapports est celui que l'on peut exprimer avec un seul nombre entier. Ainsi, par exemple, si la droite AB, *fig.* 1, Pl. 9, contient exactement *trois fois* la ligne CD, on dira que le rapport de AB à CD est égal à 3, et l'on écrira $\frac{AB}{CD} = 3$.

En plaçant le diviseur 1 au-dessous du second membre de cette équation, on aura

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{1}.$$

Ce qui donne la proportion

$$AB : CD :: 3 : 1.$$

354. Si l'on met les extrêmes à la place des moyens, on aura

$$CD : AB :: 1 : 3,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi le rapport de CD à AB est égal à $\frac{1}{3}$.

355. En multipliant l'une des deux quantités proposées par le rapport qui existe entre elles, on a l'*expression de la deuxième en fonction de la première*.

Ainsi, lorsqu'on dit que $AB = 3CD$, on exprime la valeur de AB en *fonction* de CD ; tandis que si l'on disait $CD = \frac{1}{3} AB$, on aurait exprimé la valeur de CD en *fonction* de AB.

356. Lorsque l'une des deux quantités que l'on compare n'est pas contenue dans l'autre un nombre exact de fois, on ne peut plus exprimer leur rapport par un seul nombre entier; mais s'il existe une troisième ligne dont la longueur soit exactement contenue dans chacune des deux lignes données, le rapport numérique de ces deux dernières quantités peut encore être exprimé d'une manière très-simple. Ainsi, par exemple, supposons que la petite quantité *m*, *fig.* 2, soit contenue exactement 7 fois dans la ligne AB et 5 fois dans la ligne CD, on aura

$$AB = 7m,$$
$$CD = 5m.$$

Si l'on divise la première équation par la seconde, on obtient

$$\frac{AB}{CD} = \frac{7m}{5m}.$$

Mais on doit se rappeler qu'un rapport ne change pas lorsque l'on multiplie ou que l'on divise ses deûx termes par un même nombre. Ainsi, on pourra supprimer le facteur m, ce qui donnera $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{5}$,

que l'on peut écrire si l'on veut de la manière suivante :

$$AB : CD :: 7 : 5.$$

Ainsi, la fraction $\frac{7}{5}$, ou, ce qui est la même chose, 7 : 5, est le rapport numérique des deux lignes données AB, CD. Cela veut dire que la première de ces lignes contient *sept fois la cinquième partie de la seconde*, ou que celle-ci contient *cinq fois la septième partie de la première.*

La ligne *m*, contenue exactement sept fois dans AB et cinq fois dans CD, est ce que l'on appelle leur *commune mesure.*

357. Pour obtenir cette commune mesure, on pourrait opérer de la manière suivante: Soient, *fig.* 3, les deux lignes AB, CD, dont il faut trouver le rapport numérique, on portera la plus petite CD de A en B autant de fois qu'elle pourra y être contenue; supposons, par exemple, 3 fois depuis A jusqu'à E; on aura donc

$$AB = AE + EB = 3CD + EB.$$

On portera ensuite EB sur CD de C en D, et si elle est contenue par exemple 5 fois de C en F, on aura

$$CD = CF + FD = 5EB + FD.$$

Enfin, si nous supposons que la ligne FD soit contenue exactement 2 fois dans EB, nous aurons

$$EB = 2FD.$$

Alors FD sera la commune mesure demandée, et si nous représentons sa longueur par m, nous aurons

$$EB = 2m,$$

par conséquent

$$CD = 5EB + FD = 5 \times 2m + m = 11m,$$
$$AB = 3CD + EB = 3 \times 11m + 2m = 35\,m.$$

Ainsi, $AB = 35m,$

$CD = 11m.$

Divisant AB par CD, on obtient

$$\frac{AB}{CD} = \frac{35m}{11m} = \frac{35}{11},$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une proportion

$$AB : CD :: 35 : 11;$$

par conséquent $\frac{35}{11}$ ou 35 : 11, est le rapport numérique des deux droites AB, CD.

358. On aura sans doute reconnu l'analogie qui existe entre l'opération que nous venons d'indiquer et celle que l'on emploie dans l'arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres.

En général, pour trouver le rapport numérique entre deux quantités, il faut:

1° *Chercher leur commune mesure;*

2° *Exprimer les valeurs de ces quantités en fonction de leur commune mesure* (355);

3° *Diviser l'une de ces valeurs par l'autre, et supprimer le facteur qui représente la mesure commune.*

Il ne reste plus alors que les deux nombres abstraits qui forment les termes du rapport numérique demandé.

359. La suppression du facteur commun *m* met en évidence un fait important: c'est que *le rapport qui existe entre deux quantités est indépendant de la quantité auxiliaire employée comme mesure commune.*

En effet, si au lieu de prendre FD pour terme de com-

paraison on eût pris la moitié de FD, on aurait eu, en représentant cette moitié par m',

$$AB = 35m = 70m',$$
$$CD = 11m = 22m';$$

d'où
$$\frac{AB}{CD} = \frac{70m'}{22m'} = \frac{70}{22} = \frac{35}{11}.$$

Si l'on eût pris pour commune mesure une quantité m'', contenue 1000 fois dans FD, on aurait eu

$$\frac{AB}{CD} = \frac{35 \times 1000\,m''}{11 \times 1000\,m''} = \frac{35000}{11000} = \frac{35}{11}.$$

360. Si l'on voulait obtenir le rapport numérique qui existe entre deux arcs d'un même cercle ou de cercles égaux, on pourrait opérer comme pour deux lignes droites. Ainsi, par exemple, étant donnés, *fig.* 7, les deux arcs AB, CD, décrits avec des rayons égaux, on ouvrira le compas d'une quantité égale à CD ; et du point A, comme centre, on tracera l'arc VU, ce qui déterminera un arc AE égal à CD, puisqu'ils auront des cordes égales ; de sorte que l'on aura

$$AB = AE + EB = CD + EB.$$

On portera ensuite l'arc EB de C en D, et s'il est contenu, par exemple, 2 fois de C en F, on aura

$$CD = CF + FD = 2EB + FD.$$

Enfin, si nous supposons que l'arc FD soit contenu exactement 3 fois dans EB, nous aurons

$$EB = 3FD.$$

Alors FD sera la commune mesure, et, si nous représentons sa longueur par m, nous aurons

$$EB = 3m,$$
$$CD = 2EB + FD = 2 \times 3m + m = 7m,$$
$$AB = CE + EB = 7m + 3m = 10\,m.$$

Ainsi,
$$AB = 10m,$$
$$CD = 7m.$$

Divisant AB par CD, on obtient

$$\frac{AB}{CD} = \frac{10m}{7m} = \frac{10}{7};$$

d'où l'on conclut

$$AB : CD :: 10 : 7.$$

Par conséquent $\frac{10}{7}$ ou 10 : 7, est le rapport numérique des deux arcs AB, CD.

II.

361. **Rapport incommensurable.** Nous avons supposé, dans l'article 357, que la quantité FD, *fig.* 3, était contenue nombre exact de fois dans chacune des deux droites AB, un CD ; mais cela n'aura pas toujours lieu, parce que les deux quantités que l'on compare n'ont pas nécessairement entre elles une commune mesure.

Il pourrait arriver, par exemple, que la ligne FD étant portée sur EB, elle y fût contenue deux fois plus un reste; que ce reste, porté sur FD, y fût lui-même contenu un certain nombre de fois plus un reste; que ce dernier reste, porté sur le reste précédent, y fût encore contenu un certain nombre de fois plus un reste, et ainsi de suite. Enfin, il serait possible qu'en continuant toujours à opérer de la même manière, on ne parvînt *jamais* à un reste exactement contenu dans le reste précédent.

On conclurait de là qu'il n'existe pas de commune mesure entre les deux quantités que l'on compare, c'est-à-dire qu'aucune partie exacte de l'une de ces quantités ne peut être exactement contenue dans l'autre, et réciproquement. Dans ce cas, le rapport demandé ne peut pas être exprimé exactement en nombre, et l'on dit alors qu'il est *incommensurable*.

362. On pourrait dire que, *dans le rapport incommensurable, la commune mesure est infiniment petite.*

363. Il ne faut pas confondre un rapport incommensurable avec celui dont les termes seraient deux fractions. Ainsi, par exemple, si l'on avait la proportion

$$A : B :: \frac{5}{7} : \frac{11}{23},$$

il est évident que cela reviendrait à dire

$$A : B = \frac{5}{7} : \frac{11}{23} = \frac{5 \times 23}{7 \times 11} = \frac{115}{77} = 115 : 77;$$

d'où l'on doit conclure que le rapport des quantités A et B est commensurable, puisqu'il existe entre elles une *commune mesure* qui est contenue 115 fois dans la première et 77 fois dans la seconde.

364. L'opération indiquée aux numéros 357 et 360, peut bien faire comprendre ce que l'on entend par la commune mesure de deux droites ou de deux arcs de cercles; mais elle n'est pas de nature à mettre en évidence l'existence de cette quantité, et par conséquent elle ne peut pas servir pour en déterminer exactement la valeur. En effet, on conçoit qu'en opérant comme nous l'avons dit, on finira toujours par arriver à un reste si petit, qu'il sera impossible de reconnaître par la superposition, si ce reste est, ou n'est pas exactement contenu dans le reste précédent.

Ainsi, ce n'est pas par des opérations de compas, que l'on pourra reconnaître dans quel cas un rapport est commensurable. La décision de cette question, dans chaque cas particulier, dépendra de principes qui seront établis plus tard, et nous ne devons considérer ce qui précède que comme une définition de ce que l'on entend par rapport incommensurable, et comme un avertissement nécessaire pour l'intelligence des théorèmes suivants.

365. Il est d'ailleurs à peu près indifférent, pour les

applications, que les rapports soient commensurables ou qu'ils ne le soient pas ; il suffit que l'on puisse obtenir ces nombres avec l'exactitude qui est nécessaire pour la question dont on s'occupe, et quand même on aurait obtenu les deux termes qui expriment exactement la valeur d'un rapport commensurable, on préférerait presque toujours, remplacer l'expression exacte de ce rapport par un nombre décimal qui ne serait qu'approché ; mais dont la forme se prêterait mieux aux exigences du calcul.

Ainsi, par exemple, si nous reprenons la proportion obtenue au numéro 357.

$$AB : CD :: 35 : 11,$$

on pourra diviser les deux derniers termes par 11, et l'on aura

$$AB : CD :: \frac{35}{11} : 1 ;$$

d'où

$$AB : CD :: 3{,}181818, \text{ etc.} : 1.$$

Le rapport exact $\frac{35}{11}$ est donc remplacé par $\frac{3{,}1818...}{1}$. Ce rapport n'est qu'approché, mais l'inconvénient qui en résulte est bien compensé par l'avantage de n'avoir pas d'autre diviseur que l'unité.

Le rapport précédent peut encore être écrit de la manière suivante : $\frac{3}{1}$, $\frac{32}{10}$, $\frac{318}{100}$, $\frac{3182}{1000}$, etc.

Ces diverses valeurs sont d'autant plus approchées que le nombre des chiffres est plus grand et, dans la pratique, chacun pourra limiter cette exactitude, suivant la nature de la question proposée.

Lignes Proportionnelles.

III.

366. **Définitions**. Quatre lignes droites sont en proportion lorsque le rapport des deux premières est égal au rapport des deux dernières. Dans ce cas, on dit qu'elles sont *proportionnelles*.

Si par exemple on avait, *fig.* 2 et 4,

$$AB : CD :: 7 : 5,$$
$$A'B' : C'D' :: 7 : 5,$$

on pourrait en conclure

$$AB : CD :: A'B' : C'D'.$$

367. Ce que nous venons de dire est également vrai lorsque le rapport est incommensurable, et pour démontrer dans ce cas l'existence de la proportion, il suffit de prouver que les deux rapports sont égaux sans qu'il soit nécessaire de calculer leur valeur.

IV.

368. **Théorème**. *Lorsqu'une droite est parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupe les deux autres côtés en parties proportionnelles.*

Démonstration. *Fig.* 5. Admettons que l'on ait la proportion $AD : DB :: 4 : 3$,

ce qui revient à supposer qu'il existe une commune mesure $A\nu$ qui serait contenue *quatre fois* dans AD et *trois fois* dans DB. Partageons AD en quatre parties égales; il est évident que DB en contiendra trois. Concevons ensuite les droites νu, is, kz, parallèles à BC, et les droites up, sq, zx, parallèles à AB, on aura

$up = \nu i$, comme parallèles entre parallèles; mais $\nu i = A\nu$, par construction.

Ajoutant et réduisant, on aura

$$up = A\nu.$$

De plus, l'angle $A = pus$, comme internes-externes, et l'angle $A\nu u = ups$, comme ayant leurs côtés parallèles. Ainsi les deux triangles $A\nu u$, ups, sont égaux (145) et l'on a $Au = us$.

On démontrerait de la même manière que toutes les parties sz, zH, Ho, etc., sont égales à Au, et par conséquent égales entre elles.

Or, si nous prenons l'une de ces parties égales pour terme de comparaison, et que nous exprimions sa valeur par m, nous aurons

$$AH = 4m,$$
$$HC = 3m.$$

Divisant la première équation par la deuxième, on obtient

$$\frac{AH}{HC} = \frac{4m}{3m};$$

d'où, en supprimant le facteur m,

$$\frac{AH}{HC} = \frac{4}{3},$$

et par conséquent AH : HC :: 4 : 3 ;
mais on avait admis dans l'énoncé

AD : DB :: 4 : 3 ;

on aura donc, par suite du rapport commun,

AD : DB :: AH : HC.

369. Corollaire I. Le principe que nous venons d'établir est indépendant de la grandeur de la commune mesure dont l'existence n'a été supposée que pour faciliter la démonstration, et l'on conçoit que l'égalité des deux rapports ne serait pas changé si l'on eût pris un terme de comparaison beaucoup plus petit et même infiniment petit (359); ce qui nous conduit à conclure qu'il serait encore

vrai dans le cas où le rapport des parties comparées serait incommensurable.

En général, le rapport qui existe entre deux côtés d'un triangle, dépend uniquement de la direction du troisième, et, si l'on fait mouvoir ce côté parallèlement à lui-même, le rapport des deux premiers ne change pas.

Supposons, par exemple, *fig.* 6, que l'on ait

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

si l'on trace B'C' parallèle à BC, on aura encore

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{2}{3},$$

quelle que soit la distance du point B' au point A, et, par conséquent, quel que soit le rapport entre AB' et B'B.

Il y a plus, c'est que le rapport ne serait pas changé dans le cas ou la droite mobile passerait par le sommet, pourvu qu'on lui ait conservé sa direction Dans ce cas, les trois points A, B'', C'', seraient réunis en un seul, la commune mesure étant infiniment petite serait réduite à zéro, le côté AB'' vaudrait 2×0, le côté AC'' vaudrait 3×0, et le rapport serait

$$\frac{AB''}{AC''} = \frac{2 \times 0}{3 \times 0} = \frac{2}{3}.$$

Si la parallèle mobile passait au delà du sommet, les distances du point A aux deux points de section B''' et C''' deviendraient négatives, et le rapport serait alors

$$\frac{-AB'''}{-AC'''} = \frac{AB'''}{AC'''} = \frac{2}{3}.$$

370. COR. II. *Fig.* 9. Nous avons, par le principe démontré au numéro 366,

(1) AD : DB :: AH : HC.

On en conclut, en combinant les termes,

$$(AD + DB) : AD :: (AH + HC) : AH,$$
$$(AD + DB) : DB :: (AH + HC) : HC;$$

d'où

(2) $$AB : AD :: AC : AH,$$
(3) $$AB : AD :: AC : HC.$$

Enfin, si l'on change les moyens de place dans les proportions (1), (2) et (3), on aura

$$AD : AH :: DB : HC,$$
$$AB : AC :: AD : AH,$$
$$AB : AC :: DB : HC,$$

371. **Cor.** III. *Fig.* 8. Lorsque plusieurs droites parallèles BC, DE, FH, etc., rencontrent les côtés d'un angle A, elles déterminent sur ces côtés des parties proportionnelles.

En effet, on aura, par le théorème précédent,

$$AB : AC :: BD : CE :: AD : AE;$$

mais $$AD : AE :: DF : EH.$$

Or, par suite du rapport commun, il viendra.

$$AB : AC :: BD : CE :: DF : EH, \text{ etc.}$$

En combinant ensuite les antécédents et les conséquents de la même manière, on en conclut que *tel nombre de parties que l'on voudra prises sur le côté* AX, *est à la somme des parties correspondantes sur* AY, *comme tout autre nombre de parties du premier côté, est à la somme des parties correspondantes du second côté.*

V.

372. **Théorème.** *Fig.* 9. *Lorsqu'une droite* DH *est parallèle au côté* BC *d'un triangle*, on a la proportion

$$BC \quad DH :: AB : AD :: AC : AH.$$

Démonstration. Concevons la droite DI parallèle au côté AC, on aura BC : IC :: AB : AD.

Remplaçant IC par DH, qui lui est égal comme parallèles entre parallèles, on aura

BC : DH :: AB : AD,

et, par conséquent, comme AC : AH.

373. **Corollaire** I. *Fig*. 8. Les parallèles BC, DE, FH, etc., sont entre elles comme les distances AB, AD, AF, ou comme les distances AC, AE, AH, etc.

En effet, on a, par le théorème précédent,

BC : DE :: AB : AD.

On a par la même raison

DE : FH :: AD : AF.

Changeant les moyens de place dans ces deux proportions, on obtient

BC : AB :: DE : AD,

DE : AD :: FH : AF.

Puis, à cause du rapport commun, on aura

BC : AB :: DE : AD :: FH : AF ;

et continuant :: KI : AK, etc., on trouverait de même

BC : AC :: DE : AE :: FH : AH :: KI : AI.

VI.

374. **Théorème**. *Fig*. 10. *La droite* AD, *menée comme l'on voudra par le sommet d'un triangle* ABC, *divise le côté opposé, ainsi que la parallèle* KH, *en parties proportionnelles*.

Démonstration. On a par le théorème précédent

BD : KO :: AD : AO,

DC : OH :: AD : AO.

Par suite du rapport commun il viendra

BD : KO :: DC : OH.

375. **Corollaire.** *Fig.* 11. Les droites AB, AC, AD, AE, etc., menées comme l'on voudra par un point quelconque A, divisent les parallèles BX, KY, en parties proportionnelles, car le théorème qui précède donne évidemment BC : KH :: CD : HI :: DE : IO, etc.

En combinant les antécédents comme les conséquents, on aura

BC + CD + DE, etc., KH + HI + IO, etc., :: BC : KH.

Enfin, *tel nombre de parties que l'on voudra prises sur* BX, *est à la somme d'un pareil nombre de parties correspondantes prises sur* KY, *comme tout autre nombre de parties de* BX *est à la somme des parties correspondantes de* KY.

Tout ce qui précède s'applique également aux parties de la parallèle K'Y'.

VII.

376. **Théorème.** *Fig.* 12. *La droite qui divise en deux parties égales l'angle d'un triangle, divise le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés correspondants de l'angle partagé, de sorte que l'on doit avoir la proportion* DB : DC :: AB : AC.

Démonstration. Par le point B, concevons la droite BM parallèle à la bissectrice AD, et supposons le côté AC prolongé jusqu'au point M, on aura

l'angle MBA = BAD, comme alternes-internes,

l'angle DAC = BMA, comme internes-externes.

De plus, on a

l'angle BAD = DAC, par construction.

Ajoutant ces trois équations et réduisant, il viendra

l'angle MBA = BMA.

Par conséquent le triangle MAB est isocèle ; d'où il résulte que AM = AB.

Mais le parallélisme des droites AD, MB, donnera la proportion DB : DC :: AM : AC.

Remplaçant AM par son égal AB, on obtiendra

(1) DB : DC :: AB : AC.

377. **Corollaire.** Si, au lieu de partager en deux parties égales l'angle intérieur BAC, on divisait, *fig.* 14, l'angle extérieur BAH, formé par le côté AB et par le prolongement de AC, on aurait encore la proportion

DB : DC :: AB : AC.

En effet, dans ce cas, la droite BM, menée par le point B parallèlement à la bissectrice DA, serait dirigée dans l'intérieur du triangle, et l'on aurait alors

l'angle MBA = BAD, comme alternes-internes,
l'angle DAH = BMA, comme internes-externes,
l'angle BAD = DAH, par construction.

Ajoutant et réduisant, on obtient

l'angle MBA = BMA ;

donc le triangle ABM est isocèle, et l'on a

AB = AM.

Mais le parallélisme des lignes DA et BM donne la proportion DB : DC :: AM : AC.

Remplaçant AM par son égal AB, il vient

(2) DB : DC :: AB : AC.

378. **Remarque.** L'identité qui existe entre les proportions (1) et (2), permet de les considérer comme les conséquences d'un même principe, que nous énoncerons de la manière suivante :

La droite qui partage en deux parties égales l'angle formé par les deux côtés d'un triangle, détermine, sur le

troisième côté, deux segments, qui sont entre eux comme les côtés correspondants de l'angle partagé.

379. Par le mot *segments*, il ne faut pas entendre deux parties d'une droite donnée, mais *les distances du point de section aux extrémités de la droite coupée.* Ainsi, *fig.* 13, lorsque la droite BC est rencontrée par une sécante AS, les deux segments sont DB et DC, tandis que si la sécante A'S' ne coupait la droite BC que dans son prolongement, les segments seraient D'B et D'C.

CHAPITRE II.

Figures semblables.

I.

380. Définitions. Nous avons, au commencement du premier livre, comparé les figures quant à leur égalité; nous allons actuellement rechercher les rapports qui existent entre elles.

Deux figures peuvent avoir la même forme quoiqu'elles soient de grandeurs différentes, *fig.* 5, Pl. 10, on dit alors qu'elles sont *semblables*, et que toutes leurs parties sont en proportion.

La similitude ne résulte pas seulement de l'égalité de rapport entre les parties correspondantes des deux figures que l'on compare, il faut encore que ces parties soient placées dans le même ordre et inclinées entre elles de la même manière; c'est pourquoi nous adopterons la définition suivante :

381. *Deux figures sont semblables lorsqu'elles ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.*

382. *Les côtés, les lignes, les angles homologues,* sont les parties correspondantes des deux figures.

383. Il résulte de la définition précédente, que deux conditions sont essentielles pour qu'il y ait similitude entre deux figures. Ainsi, lorsque deux polygones ont les angles égaux et que les côtés ne sont pas proportionnels, ils ne sont pas semblables; pareillement, la proportion des côtés ne suffirait pas pour établir la similitude si l'égalité des angles n'existait pas. Mais, dans les triangles, l'une des deux conditions de la similitude ne peut jamais avoir lieu toute seule, et lorsque l'on a reconnu l'existence de l'une d'elles on peut en conclure celle de l'autre. C'est ce qui va être développé dans les articles suivants.

Triangles semblables.

II.

384. **Théorème.** *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun.*

Démonstration. *Fig.* 1. Soient les deux triangles ABC, DOH, tels que l'on ait l'angle A = D, l'angle B = O et l'angle C = H. Portons le côté DO de A en K, et le côté DH de A en S, le triangle AKS sera égal à DOH, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; on aura donc

l'angle AKS = DOH;
mais on a DOH = ABC.

Ajoutant et réduisant, on obtient

l'angle AKS = ABC;

donc la ligne KS est parallèle à BC; d'où il résulte que

AB : AK :: AC : AS;

mais on a (372) AC : AS :: BC : KS;

on aura donc, à cause du rapport commun,

AB : AK :: AC : AS :: BC : KS.

Si l'on remplace actuellement les trois lignes AK, AS et KS, par leurs égales DO, DH et OH, on aura

AB : DO :: AC : DH :: BC : OH.

Ainsi, les deux triangles ABC, DOH, ont leurs côtés proportionnels chacun à chacun, et puisqu'en outre ils avaient les angles égaux, il s'ensuit qu'ils satisfont aux deux conditions exigées par la définition du numéro 381, et que par conséquent ils sont semblables.

385. **corollaire** I. Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont *deux angles égaux chacun à chacun*, puisque l'on sait, dans ce cas, que les troisièmes angles sont pareillement égaux (113).

386. **cor.** II. Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés *parallèles chacun à chacun*, puisque l'on a démontré (87) que les angles qui ont les côtés parallèles sont égaux.

387. **cor.** III. Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés *perpendiculaires chacun à chacun :* cela est une conséquence du théorème démontré au numéro 89; mais on pourrait encore parvenir au même résultat en raisonnant de la manière suivante :

Soient, *fig.* 2, les deux triangles ABC, DOH, tels que l'on ait AB perpendiculaire sur DO; AC perpendiculaire sur DH; et BC perpendiculaire sur OH. Prolongeons les côtés de ces triangles jusqu'à ce que chacun d'eux rencontre celui auquel il est perpendiculaire, nous aurons, dans le quadrilatère KBSO, la somme des quatre angles

KBS + BSO + SOK + OKB = 4 angles droits (122);

mais, par l'énoncé du théorème, on a

1 angle droit = OKB,

1 angle droit = BSO ;

de plus, 2 angles droits = SOK + KOH (60).

Ajoutant et réduisant, il restera

l'angle KBS = KOH,

ou, ce qui est la même chose,

l'angle ABC = DOH.

Si l'on considère ensuite le quadrilatère UCSH, on a

4 angles droits = UCS + CSH + SHU + HUC;

mais, par l'énoncé du théorème, on a

CSH = 1 angle droit,

HUC = 1 angle droit ;

de plus,

BCU + UCS = 2 angles droits.

Ajoutant et réduisant, il restera

l'angle BCU = SHU,

ou, ce qui revient au même,

l'angle BCA = OHD.

Ainsi, les deux angles ABC, BCA, étant égaux chacun à chacun aux deux angles DOH et OHD, il s'ensuit que les deux triangles ABC, DOH, sont semblables (385).

Si l'on voulait démontrer l'égalité des deux angles BAC, HDO, on dirait

VAK + AVK = 1 angle droit (115),

DVU = AVK (65),

1 angle droit = DVU + UDV (115),

UDV = HDO (65),

Ajoutant et réduisant il resterait

VAK = HDO,

et, par conséquent,

BAC = DHO.

Lorsque l'on a reconnu la similitude de deux triangles, on doit se rappeler que les côtés homologues sont toujours opposés aux angles égaux. Ainsi, dans l'exemple qui précède, le côté AC, opposé à l'angle B du triangle ABC, sera l'homologue du côté DH, opposé à l'angle O dans le triangle DOH. Par la même raison le côté AB sera l'homologue de DO et le côté BC sera l'homologue de OH, ce qui donnera par conséquent

AC : DH :: AB : DO :: BC : OH.

Il faut s'exercer à retrouver ainsi les côtés homologues, quelles que soient les positions relatives des triangles que l'on compare.

On peut faciliter cette recherche en désignant les angles égaux entre eux, par des accents, comme cela est indiqué sur la figure.

388. **cor.** IV. Deux triangles rectangles sont semblables lorsque l'un des angles aigus du premier est égal à l'un des angles aigus du second ; car, dans ce cas, il est évident que les trois angles sont égaux chacun à chacun (115).

389. **cor.** V. Deux triangles isocèles sont semblables lorsque les angles au sommet sont égaux, ou lorsque l'angle à la base du premier est égal à l'angle à la base du second, parce que, dans l'un comme dans l'autre cas, les deux autres angles sont nécessairement égaux chacun à chacun.

390. **cor.** VI. Deux triangles équilatéraux sont toujours semblables entre eux.

III.

391. **Théorème**. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels chacun à chacun.*

Démonstration. *Fig.* 1. Soient les deux triangles

ABC, DOH, tels que l'angle A soit égal à D et que l'on ait la proportion AB : DO :: AC : DH,

portons DO de A en K et DH de A en S, on aura le triangle AKS égal au triangle DOH, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; mais si dans la proportion admise par l'énoncé, on remplace DO par son égal AK et DH par AS, on a

AB : AK :: AC : AS;

par conséquent la droite KS est parallèle à BC, puisqu'elle partage les côtés de l'angle A en parties proportionnelles; donc

l'angle AKS = ABC;

mais les deux triangles AKS, DOH, étant égaux par construction, on a

l'angle DOH = AKS.

Ajoutant ces deux équations et réduisant, on obtient

l'angle DOH = ABC.

Or, on avait l'angle D = A;

donc les deux triangles ABC, DOH, sont semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun (385).

392. **Corollaire** I. Deux triangles rectangles sont semblables lorsque les côtés de l'angle droit du premier sont entre eux comme les côtés de l'angle droit du second.

393. **Cor.** II. Deux triangles isocèles sont semblables lorsque les bases sont comme les hauteurs, parce qu'alors ils sont composés de deux triangles rectangles semblables chacun à chacun (392), et que par conséquent ils ont les angles égaux.

IV.

394. **Théorème**. *Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont l'hypoténuse et un côté proportionnels chacun à chacun.*

Démonstration. *Fig*. 3. Soient les deux triangles rectangles BAC, ODH, tels que l'on ait

BA : OD :: BC : OH,

faisons l'angle DOK égal à ABC, et prolongeons le côté HD, les deux triangles DOK, BAC, seront semblables, puisqu'ils seront rectangles et qu'ils auront l'angle DOK égal à l'angle ABC (388), on aura donc

BA : OD :: BC : OK;

mais les trois premiers termes de cette proportion étant les mêmes que dans la proportion admise par l'énoncé, les quatrièmes termes doivent être égaux, par conséquent

$OH = OK$,

et le triangle OHK étant isocèle, la perpendiculaire OD passe au milieu de la base, ce qui donne

$DK = DH$.

Ainsi les deux triangles DOH, DOK, sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, et puisque le second de ces deux triangles est semblable, par construction, au triangle BAC, il s'ensuit que les triangles BAC, DOH, sont semblables.

V.

395. **Théorème**. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les trois côtés proportionnels chacun à chacun.*

Démonstration. *Fig*. 4. Soient les deux triangles ABC, DOH, tels que l'on ait

AB : DO :: AC : DH :: BC : OH.

Faisons l'angle $ODK = CAB$ et l'angle $DOK = CBA$, le triangle DOK sera semblable au triangle ABC (385), et l'on aura AB : DO :: AC : DK :: BC : OK;

mais si l'on compare cette suite de rapports avec celle qui

précède, on reconnaît que les antécédents sont égaux ; d'où il résulte que les conséquents sont en proportion ; ce qui donne DO : DO :: DH : DK :: OH : OK.

Or, les deux termes du premier rapport étant égaux, il doit en être de même pour les autres rapports; ce qui donne

DH = DK,
OH = OK.

Donc les deux triangles DOH, DOK, sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, et puisque le triangle DOK est semblable, par construction, au triangle ABC, il s'ensuit que les deux triangles ABC, DOH, sont semblables.

396. **Corollaire.** Deux triangles isocèles sont semblables lorsque leurs bases sont entre elles comme leurs côtés obliques, car il est évident que dans ce cas ils ont leurs trois côtés proportionnels chacun à chacun.

Polygones semblables.

VI.

397. **Théorème**. *Fig.* 5. *Deux polygones semblables peuvent toujours être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement placés.*

Démonstration. Si les deux polygones ABCDEH, *abcdeh*, sont semblables (381), on a la proportion

AB : *ab* :: BC : *bc*.

De plus, l'angle ABC = *abc*.

Par conséquent, si l'on trace les diagonales AC et *ac*, on aura deux triangles ABC, *abc*, qui seront semblables,

comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, ce qui donnera

BC : *bc* :: AC : *ac*;

mais, par suite de la similitude des deux polygones, on a

BC : *bc* :: CD : *cd*.

On aura donc, à cause du rapport commun,

AC : *ac* :: CD : *cd*.

De plus, si des angles égaux BCD, *bcd*, qui appartiennent aux deux polygones donnés, on retranche les angles BCA, *bca*, qui sont égaux, comme appartenant aux deux triangles semblables ABC, *abc*, il restera l'angle ACD = *acd*.

Par conséquent, si l'on trace les diagonales AD, *ad*, on formera deux nouveaux triangles ACD, *acd*, qui seront encore semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

En continuant à raisonner de la même manière, on démontrera que les triangles ADE, AEH, sont semblables chacun à chacun aux triangles *ade*, *aeh*.

VII.

398. **Théorème.** *Si deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement placés, ils seront semblables.*

Démonstration. *Fig.* 5 Supposons que les triangles ABC, ACD, ADE, soient semblables aux triangles *abc*, *acd*, *ade*, etc., ils auront leurs angles égaux chacun à chacun; ce qui donnera l'angle ABC = *abc*.

De plus, l'angle BCD, qui est la somme des deux angles BCA + ACD, sera égal à l'angle *bcd*, qui est la somme des deux angles *bca* + *acd*.

On démontrerait de même que les angles CDE, DEH, sont égaux aux angles *cde, deh*.

Enfin, le dernier angle BAH, étant la somme des angles BAC, CAD, DAE, etc., sera égal à *bah*, qui est la somme des angles *bac, cad, dae*, etc.

Il résulte, par conséquent, de ce que nous venons de dire, que les deux polygones ABCDEH, *abcdeh*, ont les angles égaux.

Mais la similitude des triangles ABC, *abc*, donne

AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac*;

la similitude des triangles ACD, *acd*, donnera

AC : *ac* :: CD : *cd*;

on aura donc, à cause du rapport commun,

AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd*;

et, continuant de la même manière,

:: DE : *de* :: EH : *eh*, etc.

Ainsi, les deux polygones seront semblables, puisqu'ils auront les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

399. **Corollaire** I. Deux parallélogrammes sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels chacun à chacun, parce que, dans ce cas, ils peuvent se décomposer en deux triangles semblables et semblablement placés.

400. **Cor.** II. Deux rectangles sont semblables lorsque les côtés adjacents sont proportionnels chacun à chacun.

401. **Cor.** III. Deux losanges sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal chacun à chacun.

402. **Cor.** IV. Tous les carrés sont des figures semblables.

VIII.

403. **Théorème**. *Deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, sont deux figures semblables.*

Démonstration. *Fig.* 6. La somme des angles étant la même dans les deux polygones (122), il s'ensuit que chacun des angles du premier est égal à l'un des angles du second ; de plus, les côtés étant égaux de part et d'autre, on aura évidemment

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd, \text{ etc.}$$

Ainsi, les deux polygones seront semblables, puisqu'ils auront les angles égaux et les côtés proportionnels.

IX.

404. **Théorème**. *Les cercles sont des figures semblables.*

Démonstration. Si, dans deux circonférences quelconques, on inscrit deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, ces deux polygones *seront semblables.*

Si l'on partage, de part et d'autre, les arcs sous-tendus en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales, et que l'on joigne entre eux les points de division par des cordes, les polygones successifs que l'on obtiendra *ne cesseront pas d'être semblables*, et s'approcheront d'autant plus de la circonférence, que le nombre des côtés sera plus grand.

Enfin, si l'on suppose que les subdivisions soient continuées jusqu'à l'infini, on aura deux polygones réguliers, d'un nombre infini de côtés, qui se confondront avec les deux circonférences données. Or, il est évident que dans les transformations successives par lesquelles on aura fait passer les deux polygones inscrits, *ils n'auront pas cessé un seul instant d'être semblables*, et que, par conséquent,

ils conserveront jusqu'à l'infini toutes les propriétés qui dépendent de la similitude; c'est pourquoi il doit être permis de considérer les cercles comme des figures semblables.

CHAPITRE III.

Propriétés des figures semblables.

I.

405. **Définitions**. Nous avons donné le nom de *parties homologues*, à celles qui se correspondent dans deux figures semblables; mais cette définition a besoin de quelques développements. En effet, lorsqu'il s'agit de deux triangles semblables, les angles homologues sont ceux dont on a reconnu l'égalité, les côtés homologues sont ceux qui sont opposés aux angles homologues; mais cette distinction ne suffirait plus pour faire reconnaître les côtés homologues des polygones, parce que dans ces figures un côté n'est pas toujours opposé à un angle, dans le sens que l'on attache ordinairement à cette expression.

406. Nous dirons donc, en général, que *des côtés sont homologues lorsqu'ils sont semblablement placés dans des figures semblables.*

407. D'après cela les **côtés homologues** sont toujours adjacents aux angles homologues, c'est-à-dire qu'en tournant, dans le même sens, autour de deux polygones semblables, et, partant, de deux angles homologues, tous les autres angles et côtés homologues doivent être successi-

vement placés dans le même ordre sur les deux figures.

408. **Lignes homologues**. Indépendamment des côtés homologues des polygones semblables, on a souvent besoin d'exprimer les relations qui existent entre *des points ou des lignes homologues*. Or, *des lignes sont homologues* lorsqu'elles rencontrent les côtés homologues de deux figures semblables, suivant des angles égaux chacun à chacun, et qu'elles coupent ces côtés en parties proportionnelles. Ainsi, les deux droites MN, *mn*, *fig*. 7, seront des lignes homologues, si l'on a l'angle EMN = *emn* et la proportion EM : *em* :: EH : *eh*.

409. Des lignes homologues peuvent être situées en dehors des deux figures que l'on compare. Par conséquent, les deux droites AX, *ax*, seront homologues si l'angle BAX est égal à l'angle *bax*, et si l'on a la proportion

AB : *ab* :: BK : *bk*.

410. Les diagonales qui joignent entre eux les sommets des angles homologues, sont évidemment des lignes homologues.

411. **Points homologues**. On dit que des points sont homologues, lorsqu'ils sont situés sur des lignes homologues, et qu'ils déterminent sur ces lignes des *segments proportionnels* aux côtés homologues des deux figures auxquelles ils appartiennent. Ainsi, les points O, *o*, seront homologues si l'on a la proportion

MO : *mo* :: EM : *em* :: EH : *eh*.

Les deux points X et *x* seront homologues si l'on a

AX : *ax* :: AB : *ab* :: BC : *bc*.

II.

412. **Théorème**. *Les triangles, et en général toutes les figures formées par la rencontre des lignes homologues, sont semblables*

Démonstration. *Fig.* 7. Les lignes homologues, étant également inclinées par rapport aux côtés homologues (408), elles se couperont suivant des angles égaux dans les deux figures, et les triangles formés par leur rencontre seront semblables.

Ainsi, par exemple, si les deux droites MN, *mn*, sont homologues, on a l'angle EMV = *emv*; mais l'angle MEV du triangle HEK est égal à l'angle *mev* du triangle *hek*; donc les deux triangles EMV, *emv*, sont semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

Les deux triangles EMV, *emv*, étant semblables, on a l'angle EVM = *evm*,
par conséquent, l'angle UVK est égal à l'angle *uvk*;
mais l'angle VKU = *vku*;
donc les deux triangles UVK, *uvk*, sont semblables.

Si l'on prolonge les côtés HE, CD, jusqu'au point P, et les côtés *he*, *cd*, jusqu'au point *p*, on aura deux triangles PED, *ped*, qui seront semblables; car l'angle PDE, supplément de EDN, sera égal à l'angle *pde*, supplément de *edn*, et l'angle PED, supplément de DEM, sera égal à l'angle *ped*, supplément de l'angle *dem*.

Les deux triangles PED, *ped*, étant semblables, on aura l'angle P égal à l'angle *p*; mais on avait l'angle EMN égal à *emn*, par la définition des lignes homologues; donc les deux triangles PMN, *pmn*, sont semblables, comme ayant deux angles égaux.

Par une suite de raisonnements analogues, on prouverait *la similitude de tous les triangles*, et, *par conséquent*, *de tous les polygones formés par la rencontre des lignes homologues* (398).

III.

413. **Théorème**. *Dans deux figures semblables, les lignes homologues sont entre elles comme les côtés.*

Démonstration. *Fig*. 7. Les triangles PED, *ped*, étant semblables, on a PE : *pe* :: ED : *ed*;
mais les droites MN, *mn*, étant des lignes homologues, elles partagent les deux côtés EH, *eh*, en parties proportionnelles, et l'on a par conséquent

Em : *em* :: EH : *eh* :: ED : *ed*;

donc, à cause du rapport commun, on aura

PE : *pe* :: EM : *em* :: ED : *ed*;

d'où, en composant,

(PE + EM) : (*pe* + *em*) :: ED : *ed*,

et par conséquent

PM : *pm* :: ED : *ed*;

mais, les deux triangles PMN, *pmn*, étant semblables, on a PM : *pm* :: MN : *mn*;

comparant les deux proportions, on obtient

MN : *mn* :: ED : *ed*.

Ainsi, les deux lignes homologues MN, *mn*, sont entre elles comme deux côtés homologues quelconques des polygones dans lesquels elles sont tracées.

414. **Corollaire**. Par des raisonnements analogues on arriverait facilement à prouver que

EH : *eh* :: EV : *ev* :: KV : *kv* :: VU : *vu*, etc.;

d'où il résulte que *les segments formés par les intersections des lignes homologues, sont entre eux comme deux côtés homologues quelconques des figures auxquelles ils appartiennent*.

IV.

415. **Théorème**. *Les périmètres ou contours de deux polygones semblables, sont entre eux comme deux côtés, et, par conséquent, comme deux lignes homologues quelconques de ces polygones*.

Démonstration. *Fig*. 7. Les deux polygones EHKBCD, *ehkbcd*, étant semblables, on a

$$EH : eh :: HK : hk :: KB : kb, \text{ etc.};$$

d'où l'on tire, en combinant les antécédents comme les conséquents,

$$(EH + HK + KB + \text{etc.}) : (eh + hk + kb + \text{etc.})$$
$$:: EH : eh :: EK : ek :: MN : mn;$$

donc *périmètre* EHKBCD : *périmètre ehkbcd*

$$:: EH : eh :: EK : ek :: MN : mn.$$

V.

416. **Théorème**. *Les périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits et aussi comme les rayons des cercles inscrits.*

Démonstration. *Fig*. 6. Les deux polygones ABC, *abc*, étant semblables (403), on a, par le théorème précédent, *périmètre* ABCD, etc. : *périmètre abcd*, etc. :: AB : *ab*; mais, si l'on trace les rayons OA, OB, OS, *oa*, *ob*, *os*, les deux triangles isocèles AOB, *aob*, seront semblables, puisque les angles aux centres AOB, *aob*, sont les mêmes dans les deux polygones (155), on aura donc

$$AB : ab :: OA : oa :: OS : os.$$

Comparant cette suite de rapports avec la proportion précédente, et supprimant le rapport commun AB : *ab*, on obtient

périmètre ABCD, etc : *périmètre abcd*, etc.

$$:: OA : oa :: OS : os.$$

417. **Corollaire** I. Si l'on multipliait jusqu'à l'infini le nombre des côtés des deux polygones, cela ne changerait rien au principe que nous venons de démontrer, mais

alors le cercle inscrit se confondrait avec le cercle circonscrit et leurs rayons seraient égaux. Ainsi, nous pourrons admettre que

Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons.

418. **Cor.** II. Le rapport des diamètres étant évidemment le même que celui des rayons, on en conclut que

Les circonférences sont entre elles comme leurs diamètres.

419. **Cor.** III. *En général les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs lignes homologues.*

On appelle *lignes homologues* dans deux cercles, celles qui sont placés *semblablement*. Ainsi, par exemple, si nous supposons, *fig.* 10, que l'angle VOU soit égal à l'angle *vou*, les cordes VU, *vu*, seront des *cordes homologues*. les perpendiculaires UK, *uk*, seront des *lignes homologues*, parce qu'elles appartiendront à des triangles rectangles OKU, *oku*, qui seront évidemment semblables, puisque l'angle KOU, supplément de VOU, est égal à l'angle *kou*, supplément de *vou* (388).

Les lignes homologues étant proportionnelles (413) on a

$$VU : vu :: OU : ou :: UK : uk :: OK : ok$$
$$:: KH : kh :: VK : vk, \text{ etc.}$$

Ainsi, *les lignes homologues partagent les rayons ou les diamètres homologues en parties proportionnelles.*

420. **Cor.** IV. On appelle *arcs semblables*, *secteurs semblables*, *segments semblables*, ceux qui répondent à des angles aux centres égaux. Ainsi, les deux arcs VZU, *vzu*, sont semblables, parce qu'ils sont compris entre les côtés des deux angles égaux VOU, *vou*.

Les deux secteurs OHSU, *ohsu*, sont semblables.

Les segments VZU, *vzu*, sont semblables.

421. **Cor.** V. Deux segments AMB, *amb*, *fig.* 8, sont

encore semblables lorsque les angles que l'on peut y inscrire sont égaux.

422. **Cor**. VI. *Les arcs semblables, étant des lignes homologues, sont entre eux comme les rayons ou comme les diamètres des cercles auxquels ils appartiennent.*

423. **Cor**. VII. La comparaison des côtés et des lignes homologues dans les figures semblables, donne lieu à un grand nombre de rapports et de proportions que l'on peut ensuite combiner d'une infinité de manières différentes. Nous nous bornerons, pour l'instant, à mettre en évidence les plus utiles de ces rapport.

VI.

424. **Théorème**. *Fig.* 11. *La perpendiculaire* AD, *abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre* BC, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.*

Démonstration. Si l'on trace les deux cordes AB, AC, on formera les deux triangles ADB, ADC, qui seront semblables, puisqu'ils sont tous deux rectangles au point D, et qu'en outre l'angle BAD du premier est égal à l'angle ACD du second, comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (89). Par conséquent, en comparant les côtés homologues, on aura la proportion

BD : AD :: AD : DC.

425. **Corollaire**. *Fig.* 9. *La perpendiculaire* AD, *abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle* BAC, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties de cette hypoténuse.*

VII.

426. **Théorème**. *Fig.* 12. *Toute corde telle que* BA, *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC, *qui*

aboutit à l'une de ses extrémités, et le segment BD *déterminé sur ce diamètre par la perpendiculaire* AD, *abaissée de l'autre extrémité de la corde.*

Démonstration. Si l'on trace la corde AC, les deux triangles BDA, BAC, seront semblables, puisqu'ils auront l'angle DBA commun, et qu'en outre ils sont tous deux rectangles : le premier en D et le second en A. On aura donc, en comparant les côtés homologues,

BD : BA :: BA : BC.

Si l'on compare les deux triangles BAC et CAD, on reconnaîtra qu'ils sont également semblables, et l'on en conclura la proportion

CD : CA :: CA : CB.

427. **Corollaire**. *Chacun des côtés de l'angle droit, dans un triangle rectangle, est moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière.* Ainsi, l'on aura, *fig*. 9,

BD : BA :: BA : BC,
CD : CA :: CA : CB.

VIII.

428. **Théorème**. *Lorsque deux cordes se coupent dans un cercle, les deux parties de l'une de ces cordes forment les extrêmes d'une proportion dans laquelle les deux parties de l'autre corde sont les moyens.*

Démonstration. *Fig*. 13. Les deux cordes données étant AD et BC, si l'on joint leurs extrémités par deux autres cordes AB et CD, les triangles AOB, COD, seront semblables, car ils auront l'angle AOB = COD, comme opposé par le sommet; de plus, l'angle BAO = OCD, puisqu'ils ont tous deux leurs sommets sur la circonférence, et qu'ils comprennent le même arc entre leurs

côtés. Ainsi, le troisième angle ABO du premier triangle est égal au troisième angle ODC du second, et, si l'on compare les côtés homologues, on aura la proportion

AO : CO :: OB : OD.

429. **Remarque**. Dans le cas dont il s'agit, on dit encore que les deux cordes sont coupées en parties *réciproquement* proportionnelles.

Le mot réciproquement est placé ici pour que l'on ne confonde pas la relation actuelle, avec le cas où l'on dit simplement que deux lignes sont coupées en parties proportionnelles, parce qu'alors, les deux parties de l'une de ces lignes forment les antécédents d'une proportion dans laquelle les deux parties de l'autre ligne formeraient les conséquents; ou bien encore, les parties de l'une des deux lignes forment les termes du premier rapport, tandis que les deux parties de l'autre ligne formeraient les termes du second rapport.

430. **Corollaire**. Le principe démontré précédemment étant indépendant de la direction suivant laquelle les deux cordes se rencontrent, il serait également vrai si l'une d'elles, BC, *fig.* 11, passait par le centre, et si l'autre corde AH était perpendiculaire sur la première.

Dans ce cas, on aurait

BD : DA :: DH : DC;

mais alors DH étant égal à DA, on obtiendrait

BD : DA :: DA : DC;

ce qui revient au principe du numéro 424.

IX.

431. **Théorème**. *Fig.* 14. *Si par un point* O, *situé en dehors d'un cercle, on mène deux sécantes* OA, OB, *on pourra toujours prendre l'une de ces sécantes et sa partie*

extérieure pour les extrêmes d'une proportion, dans laquelle l'autre sécante et sa partie extérieure formeraient les moyens.

Démonstration. Si l'on trace les deux cordes BD, AC, les deux triangles AOC, BOD, seront semblables, car ils auront l'angle en O commun; de plus, l'angle OAC sera égal à l'angle OBD, puisque ces deux angles ont leurs sommets sur la circonférence, et qu'ils comprennent le même arc CD entre leurs côtés. Ainsi, le troisième angle ACO, du premier triangle, sera égal au troisième angle BDO du second, et, si l'on compare les côtés homologues, on aura la proportion

OA : OB :: OC : OD.

La seule différence qu'il y ait entre le principe qui vient d'être démontré et celui qui précède, c'est que les deux droites AD, BC, se rencontrent en dehors du cercle au lieu de se couper dans l'intérieur.

432. **Corollaire**. Si l'on faisait tourner la sécante OB autour du point O, cela ne changerait rien aux relations démontrées, et lorsque les deux points de section B et C seraient réunis au point M, la sécante et la partie extérieure seraient remplacées toutes les deux par la tangente OM, ce qui donnerait la proportion

OA : OM :: OM : OC.

On dit alors que

La tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

433. On arriverait d'ailleurs au même résultat en comparant les côtés homologues des deux triangles AOM et DOM, qui sont semblables, car ils ont l'angle AOM commun, et l'angle OMD égal à l'angle OAM, comme inscrits dans le même segment (195).

CHAPITRE IV.

Problèmes.

I.

434. **Problème.** *Partager une ligne droite en parties égales.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 11. Supposons, par exemple, que l'on veuille partager la droite AB en sept parties égales, on tracera la droite AX, suivant une direction quelconque, et, prenant une ouverture de compas *à volonté*, on portera sept parties égales de A en C; on joindra le point C avec B, et, par chacun des points de division de AC, on tracera une parallèle à la droite CB.

En effet, il résulte, du théorème démontré au numéro 371, que les deux droites AB, AC, seront coupées en parties proportionnelles par les parallèles à la ligne CB, et, puisque les segments que l'on a portés sur AC sont égaux entre eux, il s'ensuit que les parties de AB seront égales.

435. **2e solution.** *Fig.* 2 et 3. On tracera une droite quelconque CX, parallèle à la ligne AB, que l'on veut diviser; on portera sur CX sept parties égales *quelconques*, on tracera les deux droites CA, DB, qui se couperont en un point S, et l'on joindra ce point avec chacun de ceux qui divisent CD en sept parties égales.

La construction précédente est évidemment la conséquence des principes exposés aux numéros 375.

II.

436. **Problème**. *Partager une droite en parties qui soient entre elles dans un rapport donné.*

Solution. *Fig.* 4. Si l'on voulait, par exemple, que la droite donnée AB fût partagée dans le rapport des deux nombres 7 et 4, on ferait la somme de ces nombres, et l'on obtiendrait 11; on porterait sur AX onze parties égales quelconques; on tracerait la droite CB, et, par le septième point de division on mènerait la droite DE parallèle à CB.

437. **Corollaire** I. *Fig.* 5. Si l'on voulait partager la ligne donnée en trois parties qui soient entre elles comme 5 : 2 : 3, on porterait sur AX dix parties égales quelconques, on tracerait CB, et, par les cinquième et septième points de division, on mènerait les deux droites DE, HK, parallèles à CB.

438. **Cor.** II. *Fig.* 6. Si la droite AB devait être partagée en parties qui soient entre elles dans le rapport de lignes données, par exemple, comme $a : b : c$, on ferait $AD = a$, $DH = b$, $HC = c$, on joindrait ensuite le point C avec B, et l'on tracerait les deux droites DE, HK, parallèles à CB.

Chacune des deux dernières questions pourrait encore être résolue en opérant comme au numéro 435.

III.

439. **Problème**. *Fig.* 7. *Par un point* O, *pris à volonté dans l'intérieur d'un angle donné* A, *construire une*

droite CD, *telle que les deux segments* DO, OC, *soient égaux.*

Solution. On mènera OB parallèle à l'un des côtés de l'angle donné, on fera BC = AB, et l'on tracera la droite CO, que l'on prolongera jusqu'en D. En effet (368), les deux parallèles BO, AD, partagent les côtés de l'angle C en parties proportionnelles, et, puisque l'on a fait BC = AB, il s'ensuit que CO = OD.

IV.

440. **Problème**. *Fig.* 8. *Par un point* O, *situé dans l'angle donné* A, *construire une droite* CD, *telle que les deux segments* OD, OC, *soient entre eux comme deux droites données* a, b.

Solution. On tracera, par le point A, une droite quelconque AX, sur laquelle on portera AH = *a* et HS = *b*.

On tracera ensuite OB parallèle à DA, et l'on joindra le point B avec H; enfin, on mènera SC parallèle à HB, et l'on tracera la droite CO, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté AD.

En effet, les deux droites BO, AD, étant parallèles, on a DO : OC :: AB : BC;

mais le parallélisme des droites BH, CS, donne

AB : BC :: AH : HS;

donc, à cause du rapport commun, on aura

DO : OC :: AH : HS;

et par conséquent :: *a* : *b*.

441. **Corollaire**. Si le rapport donné était exprimé par des nombres, si l'on voulait, par exemple, que les deux segments DO et OC fussent entre eux comme 4 est à 3, on prendrait une ouverture de compas quelconque, et l'on porterait cette quantité *quatre* fois de A en H, et trois

fois de H en S ; ensuite on agirait pour le reste comme dans le cas précédent.

V.

442. **Problème**. *Construire une quatrième proportionnelle à trois lignes données.*

Solution. *Fig.* 9. Soient a, b, c, les trois droites données ; on construira d'abord un angle quelconque XAY, on fera ensuite $AB = a$, $BC = b$ et $AD = c$; on joindra le point B avec D, et l'on tracera la droite CM parallèle à BD ; on aura DM pour la valeur cherchée.

En effet, les deux droites BD, CM, étant parallèles, on a $$AB : BC :: AD : DM,$$
ou, ce qui est la même chose,
$$a : b :: c : DM.$$
Ainsi, DM est une quatrième proportionnelle aux trois droites données a, b et c.

443. 2° **solution**. *Fig.* 10. On construira, comme précédemment, un angle quelconque XAY, et l'on fera $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$; on joindra le point B avec D, et l'on tracera la droite CM parallèle à BD. La droite AM sera la quatrième proportionnelle demandée, car le parallélisme des deux droites BD, CM, donnera
$$AB : AC :: AD : AM,$$
ou, ce qui est la même chose,
$$a : b :: c : AM.$$

VI.

444. **Problème**. *Construire une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.*

Solution. *Fig.* 11. Soient a et b les deux droites donnés, on tracera une droite quelconque AX, et l'on fera

$AB = a$, $BC = b$; on décrira ensuite la demi-circonférence ADC, en prenant pour rayon la moitié de AC; la perpendiculaire BD sera la moyenne proportionnelle demandée.

En effet, il résulte du théorème démontré au numéro 424, que l'on a la proportion

$$AB : BD :: BD : BC;$$

qui revient à $a : BD :: BD : b$.

445. 2° Solution. *Fig.* 12. On tracera la droite AX, et l'on fera $AB = a$, $AC = b$; on décrira la demi-circonférence ADB, en prenant pour rayon la moitié de AB; on élèvera la droite CD perpendiculaire sur AB, et l'on tracera la corde AD, qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

En effet, par le théorème démontré au numéro 425, on a $AB : AD :: AD : AC$,

et par conséquent $a : AD :: AD : b$.

VII.

446. Problème. *Partager une droite donnée en moyenne et extrême raison.* On entend par là que la droite donnée doit être partagée en deux parties telles que l'une d'elles soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie et la ligne entière.

Solution. *Fig.* 13. Par l'une des extrémités A, de la ligne donnée BA, on élèvera une perpendiculaire AC égale à la moitié de BA; on tracera l'hypoténuse BC, et, du point C comme centre, on décrira l'arc AO; enfin du point B, comme centre, on décrira l'arc OM.

Pour démontrer l'exactitude de cette construction, on prolongera la droite BC et l'arc de cercle OAD jusqu'à leur rencontre au point D. La droite BA, perpendiculaire à

l'extrémité du rayon CA, est une tangente, et, par le théorème du numéro 432, on a

$$BO : BA :: BA : BD.$$

En combinant les termes de cette proposition, on obtient $(BA - BO) : BO :: (BD - BA) : BA$;
mais, BO étant égal à BM, on a

$$BA - BO = BA - BM = MA.$$

De plus, BA, étant le double du rayon CA, est égale au diamètre OD, de sorte que

$$BD - BA = BD - OD = BO = BM.$$

Ces valeurs étant substituées dans la seconde proportion, on obtient $MA : BM :: BM : BA$.

VIII.

447. **Problème.** *Déterminer la dixième partie de la circonférence.*

Solution. *Fig.* 14. Si l'on partage le rayon AB en moyenne et extrême raison (446), et que l'on prenne le plus grand segment AM pour en faire une corde, cette corde BD, sous-tendra la dixième partie de la circonférence.

Pour le prouver, nous tracerons les droites AD, DM, et, puisque le point M partage AB en moyenne et extrême raison, nous aurons la proportion

$$AB : AM :: AM : MB.$$

Si l'on remplace AM par son égal BD, on aura

$$AB : BD :: BD : BM;$$

mais les deux termes du premier rapport sont les côtés qui comprennent l'angle B du triangle ABD, tandis que les deux termes du second rapport sont les côtés qui comprennent le même angle B dans le triangle DBM. Il

s'ensuit que ces deux triangles ABD, DBM, sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels chacun à chacun.

Mais, les deux côtés AB, AD, étant égaux comme rayons d'un même cercle, le triangle ABD est isocèle, et par conséquent le triangle DBM, qui lui est semblable, sera pareillement isocèle, ce qui donnera

$$BD = MD;$$

de plus on avait, par construction,

$$AM = BD.$$

Ajoutant les deux équations et réduisant, on obtient

$$AM = MD;$$

d'où il faut conclure que le triangle AMD est aussi isocèle. Ainsi, les triangles ABD, DBM, AMD, sont tous les trois isocèles.

Or, le triangle AMD étant isocèle, on a

l'angle $\quad DAB = ADM$

La similitude des deux triangles ADB, DMB, donne

l'angle $\quad DAB = MDB;$

on a de plus la somme des angles

$$ADM + MDB = ADB.$$

Ajoutant les trois équations et réduisant, on obtient

$$(1) \qquad 2DAB = ADB;$$

mais le triangle ADB étant isocèle, on a

l'angle $\quad ADB = DBA.$

Ajoutant et réduisant, on a

$$(2) \qquad 2DAB = DBA.$$

La somme des équations (1) et (2) donnera donc

$$4DAB = ADB + DBA,$$

et, si l'on ajoute DAB de part et d'autre, on obtient

$$5DAB = DAB + ADB + DBA = 2\,\textit{angles droits}; \quad (111)$$

d'où $\quad DAB = \dfrac{2\ \textit{angles droits}}{5} = \dfrac{4\ \textit{angles droits}}{10}.$

Or, si l'angle DAB vaut la dixième partie de quatre

angles droits, il est évident que l'arc intercepté BD doit être égal à la dixième partie de la circonférence.

448. Voici la manière la plus simple de disposer la construction. On tracera, *fig.* 15, la perpendiculaire AC égale à la moitié du rayon AB, on décrira l'arc AO en prenant le point C pour centre, puis du point B pour centre on décrira l'arc OD. *La corde* BD *sera le côté du décagone régulier inscrit;* car il résulte de cette construction (446), que BD sera égal au plus grand segment du rayon AB partagé en moyenne et extrême raison.

449. **corollaire** I. Si l'on décrit l'arc OH, on déterminera le point H, et l'arc DBH sera égal à la cinquième partie de la circonférence, de sorte que *la corde* DH *sera le côté du pentagone régulier inscrit.*

450. **cor.** II. Si l'on partage en parties égales chacun des arcs sous-tendus par les côtés du décagone régulier inscrit, on déterminera les sommets du polygone inscrit de 20 côtés, et, continuant de la même manière, on pourra inscrire les polygones de 40, 80, 160 *côtés*, etc.

451. **cor.** III. L'angle BAD, *fig.* 14, étant égal à $\frac{2}{5}$ *d'angle droit*, il s'ensuit que l'angle BAC, moitié de BAD, vaut $\frac{1}{5}$ d'angle droit. Ainsi, on sait *partager l'angle droit en cinq parties égales.*

452. **cor.** IV. *Fig.* 16. Si l'on fait la corde BH égal au rayon du cercle on aura (292)

$$l'arc\ BH = \frac{1}{6}\ de\ circonférence.$$

Si l'on fait la corde BD égal au plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême raison, on aura (447)

$$l'arc\ BD = \frac{1}{10}\ de\ circonférence.$$

Retranchant la seconde équation de la première, on aura $arc\ DH = arc\ BH - arc\ BD = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) =$

$$= \frac{1}{15}\ de\ circonférence,$$

et, par conséquent, la corde DH sera le côté du *pentédécagone régulier* inscrit.

On remarquera en même temps, que *l'arc* DH *vaut les deux tiers de l'arc* BD *sous-tendu par le côté du décagone régulier inscrit.*

Construction des figures semblables.

IX.

453. **Considérations générales.** La construction d'une figure semblable à une autre, est l'un des problèmes les plus importants de l'application des mathématiques.

En effet, nous avons dit que la géométrie avait pour but la recherche des relations qui existent entre les dimensions de l'étendue; mais, pour comparer plus facilement ces dimensions, il faut avoir un moyen de les représenter; on pourrait bien désigner par des nombres les rapports de grandeur qui existent entre les figures que l'on compare; mais, lorsque ces figures sont très-nombreuses ou très-composées, il est nécessaire d'employer le dessin pour en exprimer tous les détails. Or, si l'on veut représenter l'ensemble d'un monument, d'une machine, etc., il faut que la grandeur du dessin n'excède pas les limites ordinaires d'une feuille de papier, et que cependant, toutes les parties représentées conservent entre elles les rapports qu'elles doivent avoir après l'exécution.

Ainsi, les nombreux dessins qu'un ingénieur doit tracer pour étudier son projet, ne sont autres choses que des figures semblables aux parties correspondantes de l'objet qu'il veut faire construire.

Ce qu'on appelle ordinairement les *plans d'un bâtiment, d'un jardin, d'un parc*, sont des figures semblables aux divers polygones formés par les murs du bâtiment, par les allées ou par les routes qui traversent le parc ou le jardin dans toutes leurs directions.

Les globes, les cartes de géographie, sont des figures semblables à celles qui, sur la surface de la terre, résultent de la position relative des villes, des montagnes ou des vallées, de la direction des routes, des rivières ou des côtes, etc.

Cet exposé rapide suffit pour faire comprendre l'importance que doit acquérir par la suite la construction des figures semblables, et pour engager le lecteur à étudier avec soin tout ce qui se rapporte à cette intéressante question.

X.

454. **Problème**. *Construire un triangle semblable à un autre triangle donné.*

Chacun des théorèmes démontrés aux numéros 384, 391 et 394, donne le moyen de résoudre la question proposée. Ainsi,

455. **1re Solution**. On pourra faire deux angles du nouveau triangle égaux chacun à chacun à deux angles du triangle donné.

456. **2e Solution**. On pourra faire les côtés du nouveau triangle parallèles ou perpendiculaires aux côtés du triangle donné.

457. **3e Solution**. On pourra faire un angle égal compris entre deux côtés proportionnels chacun à chacun.

458. **4e Solution**. On pourra faire les trois côtés proportionnels chacun à chacun.

XI.

Problème. *Construire un polygone semblable à un autre polygone donné.*

La question revient évidemment

1° A décomposer le polygone donné en triangles;

2° A Construire un triangle semblable à chacun de ceux qui composent le polygone donné, en ayant soin que tous ces nouveaux triangles soient placés de la même manière que ceux qui composent le premier polygone, et que les côtés homologues soient entre eux dans le même rapport.

460. **1re Solution**. *Fig.* 1, Pl. 12. Le polygone donné étant ABCDH, on veut construire un polygone semblable, et tel que les côtés soient entre eux comme AB : *ab* :

1° On fera l'angle *cab* = CAB, et l'angle *abc* = ABC, le triangle *abc* sera semblable au triangle ABC (385);

2° On fera l'angle *dac* = DAC et l'angle *acd* = ACD, le deuxième triangle *acd* sera semblable au triangle ACD;

3° Enfin, on fera le triangle *adh* semblable au triangle ADH, et les deux polygones seront semblables comme étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement placés.

461. **2e Solution**. *Fig.* 3. Si le polygone demandé *abcdh*, et le polygone donné ABCDH doivent être situés dans le même plan, et que le côté donné *ab* soit parallèle à son homologue AB, on tracera les deux droites A*a*, B*b*, et l'on prolongera ces deux lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en S.

On joindra le point S avec tous les autres sommets du polygone donné, et l'on mènera successivement les droites *ab*, *bc*, *cd*, etc., parallèles aux droites AB, BC, CD, etc.

Les deux polygones *abcdh*, ABCDH, seront semblables, car le parallélisme des droites *ab*, AB, donnera la proportion *ab* : AB :: S*b* : SB;

mais le parallélisme des droites *bc*, BC, donnera

S*b* : SB :: *bc* : BC;

on aura donc, à cause du rapport commun,

ab : AB :: *bc* : BC;

et, continuant de la même manière,

:: *cd* : CD :: *dh* : DH.

Ainsi, les deux polygones ABCDH, *abcdh*, ont les côtés proportionnels. De plus, ils ont les angles égaux par suite du parallélisme des côtés, donc il y a similitude.

462. **3e Solution.** *Fig.* 1. Si le côté donné A*b'*, du polygone demandé devait coïncider avec son homologue AB, et que ces deux côtés eussent en A une extrémité commune, l'opération serait encore plus simple. Ainsi, on tracerait successivement les droites *b'c'*, *c'd'*, *d'h'*, parallèles aux côtés BC, CD, DH, et le polygone A*b'c'd'h'* serait évidemment semblable au polygone ABCDH.

463. **Remarque.** Les deux solutions précédentes sont exactes en théorie; mais, dans la pratique, elles ne sont pas infaillibles. En effet, si l'on a fait une erreur dans la construction du premier triangle *abc*, *fig.* 1, cette erreur, quelque petite qu'on la suppose, devra se combiner avec l'erreur provenant de la construction du second triangle, et cette double erreur se combinant avec une troisième, il en résulterait une erreur finale considérable, surtout si l'on doit construire ainsi un grand nombre de triangles consécutifs, et si les erreurs sont toutes dans le même sens, ce qui arrive souvent lorsqu'elles dépendent de l'imperfection des instruments.

Les mêmes reproches peuvent être adressés aux solutions deuxième et troisième, dans lesquelles la position de

chaque côté est déterminé par la position du côté précédent.

En général, on doit chercher autant que possible à rendre les constructions successives indépendantes les unes des autres, et l'on y parviendra en opérant de la manière suivante :

464. **4° solution**. *Fig.* 2. On tracera, dans le plan du polygone donné, une droite quelconque AB; puis on décrira la droite *ab* sur la feuille destinée à la figure que l'on veut construire. Les deux droites AB, *ab*, se nomment *bases homologues*, et leur rapport doit être donné par la question.

On construira successivement les triangles *abc*, *abd*, *abh*, *abm* et *abn*, semblables aux triangles ABC, ABD, ABH, ABM et ABN.

On tracera ensuite les droites *cd*, *dh*, *mn*, et le polygone *acdhbnm* sera semblable au polygone ACDHBNM; car les sommets et les côtés de ces deux polygones seront évidemment des points et des lignes homologues par rapport aux deux droites AB, *ab* (412).

465. Les triangles qui déterminent les positions des sommets *c*, *d*, *h*, *m*, *n*, étant indépendants les uns des autres, il est évident que les erreurs ne se combineront plus; malgré cela il pourra rester encore quelque incertitude sur la véritable position de quelques points déterminés par la rencontre de lignes qui se couperaient trop obliquement.

Dans ce cas on peut vérifier ces points en cherchant leurs distances à d'autres points dont la position est bien connue. Ainsi, par exemple, pour obtenir la longueur du côté *ah*, *fig.* 2, on cherchera le quatrième terme de la proportion AB : *ab* :: AH : *ah*.

Pour obtenir *bh* on fera

AB : *ab* :: BH : *bh*.

Pour obtenir AD on fera

AB : *ab* :: AD : *ad*,

et ainsi de suite. On voit que cela revient à construire autant de quatrièmes proportionnelles que l'on veut avoir de côtés, et par conséquent il suffit de répéter autant de fois l'opération que nous avons indiqué au numéro 442.

466. Les deux bases homologues AB et *ab* peuvent être prises où l'on veut, et même en dehors des figures.

On peut employer comme *bases* deux quelconques des côtés homologues, et dans tous les cas il faut les choisir de manière que les triangles nécessaires pour déterminer les points homologues, se rapprochent autant que possible de la forme du triangle équilatéral, afin d'éviter les intersections trop aiguës.

467. Les proportions desquelles dépendent les côtés cherchés ayant toutes le même rapport, on peut simplifier le travail en opérant de la manière suivante :

On fera un angle quelconque XA*x*, *fig.* 10. Sur les côtés de cet angle, on portera les deux droites données AB, *ab*, de la *fig.* 2, puis on tracera B*b*.

Si actuellement on porte sur AX une ligne quelconque du polygone ACDHBNM, il suffira, pour obtenir son homologue sur A*x*, de tracer une parallèle à la droite B*b*.

Ainsi, les parties AC, AD, AM, de la droite AX, *fig* 10, étant égales aux côtés AC, AD, AM, du polygone ACDHBNM, *fig.* 2, on obtiendra, *fig.* 10, A*c*, A*d*, A*m*, pour les longueurs des côtés *ac*, *ad*, *am*, du polygone *acdhbnm*, *fig.* 2.

468. **5° solution**. *Fig.* 5. On tracera les deux droites AX, *ax* : la première, dans le plan du polygone donné ; la seconde, dans le plan du polygone demandé.

On abaissera les perpendiculaires BA, CP, HQ, etc. Chacune de ces lignes se nomme une *ordonnée*. Ainsi, la

perpendiculaire BA est l'ordonnée du point B, la perpendiculaire CP est l'ordonnée du point C, et ainsi de suite.

Les distances AP, AQ, AM, sont les *abscisses* des points C, H, D. Ainsi l'abscisse d'un point est la distance du pied de son ordonnée au point A, que l'on nomme l'origine des coordonnées.

Ces conventions étant admises, il ne reste plus, pour construire le polygone *bcdh* semblable au polygone donné BCDH, qu'à faire les abscisses et les ordonnées du second polygone proportionnelles aux abscisses et ordonnées du premier.

On construira comme précédemment, *fig.* 10, un angle quelconque sur l'un des côtés duquel on portera toutes les abscisses et ordonnées du polygone BCDH, puis on tracera des parallèles suivant la direction déterminée par le rapport qui doit exister entre les côtés homologues des deux figures, et l'on obtiendra, sur le deuxième côté de l'angle auxiliaire, toutes les abscisses et ordonnées du polygone demandé.

469. **6e solution**. *Fig.* 4. Si les deux figures doivent être situées dans le même plan, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On tracera les deux droites AX, AY, perpendiculaires l'une à l'autre;

2° On construira la droite *ax* parallèle à AX, et la droite *ay* parallèle à AY;

3° Par chaque point de la figure donnée, on abaissera deux perpendiculaires : l'une sur AX, l'autre sur AY. Les perpendiculaires abaissées sur AX seront les ordonnées, et les perpendiculaires sur AY seront les abscisses des différents points de la figure donnée;

3° L'abscisse *ap* étant déterminée par le rapport qui doit exister entre les parties homologues des deux figures,

on tracera les deux droites, A*a*, P*p*, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point S;

4° On joindra le point S avec les pieds des abscisses et des ordonnées de la première figure par des droites, et les points où ces droites rencontreront les deux lignes *ax*, *ay*, seront les pieds des abscisses et ordonnées de la figure demandée.

Les points S, *fig.* 3 et 4, et le point A, *fig.* 1, se nomment *centres de similitude.*

470. **7° Solution**. Le nombre immense de lignes courbes et contournées dans tous les sens, qui représentent les cours d'eau, les côtes, les sinuosités du terrain, ne permet pas d'appliquer les méthodes précédentes au dessin des cartes de géographie.

Dans ce cas, on construit, *fig.* 8, un assez grand nombre de petits carrés pour couvrir entièrement la figure donnée, puis on trace le même nombre de carrés sur la feuille destinée au dessin que l'on veut faire. Les côtés de ces carrés doivent être entre eux comme les lignes ou côtés homologues des deux figures.

On construit ensuite, à vue d'œil dans chacun des carrés de la deuxième figure, toutes les lignes semblables à celles qui existent dans le carré correspondant de la figure donnée.

Il est évident que l'exactitude du résultat dépendra du nombre des carrés des deux figures.

471. Le moyen que nous venons d'indiquer sert également pour réduire ou agrandir proportionnellement toute espèce de figures, tels que paysage, ornements, tableaux, gravures, etc.

XII.

472. **Instruments.** Afin de ne rien omettre de ce qui se rattache à l'importante question qui vient de nous occuper, je vais décrire quelques instruments imaginés pour accélérer le travail ou en augmenter l'exactitude.

473. **Compas de proportion.** La construction de la figure 10 est une application du principe démontré au numéro 371, tandis que le compas de proportion, *fig.* 11, est la conséquence du théorème 373.

L'instrument dont il s'agit ici se compose de deux règles en métal réunies en un point *o*, autour duquel elles peuvent tourner suivant toutes les inclinaisons.

Deux droites *o* — *a*, *o* — *c*, tracées sur les branches du compas, et partant du point *o*, sont partagées en parties égales aussi petites que possible.

Supposons actuellement que l'on veuille construire, *fig.* 2, le polygone *acdhb*, semblable à ACDHB, on portera sur l'une des branches du compas de proportion, à partir du centre, une quantité égale à la droite AB, et si l'extrémité de cette longueur aboutit par exemple au point 7, on ouvrira les branches de l'instrument jusqu'à ce que la distance 7 — 7 des deux points correspondants soit égale au côté *ab* du polygone demandé.

L'instrument restant ainsi ouvert, il est évident que si l'on joignait par des droites les points correspondants des deux rayons *o* — *a*, *o* — *c*, on aurait une suite de triangles isocèles semblables entre eux, et dans chacun desquels le côté oblique serait à la base comme l'une des lignes ou côté du polygone donné ACDHB, est à la ligne ou côté homologue du polygone *acdhb*.

Ainsi, par exemple, pour obtenir le côté *am*, on prendrait avec le compas ordinaire une ouverture égale au côté AM, et l'on porterait cette ouverture sur l'une des deux droites *o*—*a*, *o*—*c*, *fig.* 11. Si, après avoir placé en *o* l'une des pointes du compas ordinaire, la seconde pointe arrive au point 2, la distance 2—2 donnera la longueur du côté *am*, *fig.* 2.

474. **Compas de réduction.** Cet instrument, *fig.* 12, est un compas à quatre branches, formant deux angles égaux opposés par le sommet.

Le centre mobile qui occupe ce point peut être fixé où l'on veut, et si on le fait avancer jusqu'à ce que la longueur des branches soit partagée suivant le rapport donné par la question, il est évident que lorsqu'on prendra par exemple une quantité AB égale à l'un des côtés du polygone donné, la distance *ab*, sera le côté homologue du polygone demandé.

475. **Pantographe.** Cet instrument, représenté *fig.* 13, se compose de quatre règles parallèles deux à deux, et mobiles autour des points *m*, A, B, C.

Les trois points S, *m*, M, sont toujours en ligne droite, et les côtés MC, *m*A, sont entre eux comme les côtés homologues des deux figures VMU, *vmu*. Le rapport de ces côtés peut être changé suivant chaque question, en déplaçant les centres des deux points A et C. Les trous percés dans les règles sont destinés à recevoir les deux chevilles servant de charnières. Le point M contient une pointe que l'on dirige avec la main, en suivant toutes les sinuosités de la figure donnée; tandis qu'un crayon placé au point *m* reproduit sur le papier une figure semblable.

La similitude des figures VMU, *vmu*, est une conséquence de celle des deux triangles MC*m*, *m*AS, qui ont

constamment un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Le point S est un centre de similitude (469), et le résultat est une application mécanique des principes démontrés aux numéros 391, 413.

476. Si la figure *vmu* était donnée, et que l'on voulùt construire la figure VMU, il faudrait placer le crayon au point M et conduire le point *m* en suivant toutes les sinuosités du dessin donné *vmu*.

XIII.

477. **Échelles de proportion**. Les échelles sont des lignes droites divisées en parties égales. Lorsque deux échelles, divisées dans le même nombre de parties égales, sont entre elles comme les côtés homologues de deux figures semblables, chaque partie de l'une des échelles est l'*unité* ou le *module* de la figure correspondante.

Ainsi, par exemple, supposons que les deux droites EM, *em*, *fig*. 6, sont entre elles comme les bases AB, *ab*, de la figure 2.

Si la droite BC contient 13 parties de l'échelle EM, la droite *bc* devra contenir 13 parties de l'échelle *em*.

478. **Échelle de dixièmes**. Si l'on voulait obtenir une grande exactitude dans le résultat, les échelles EM et *em* ne suffiraient plus, parce qu'elles ne donnent pas les fractions d'*unités*.

On pourait, il est vrai, partager l'une des unités en parties plus petites, mais alors les traits de division seraient beaucoup trop rapprochés, surtout sur la plus petite des deux échelles.

Dans ce cas, il faut opérer de la manière suivante :

Supposons que l'on veuille diviser l'unité ZX, *fig.* 7, en dix parties égales, on tracera la droite Z — *o*, sur laquelle on portera dix parties égales quelconques ; on joindra le point *o* avec X par la droite *o* — X, et par chacun des points de division de *o* — Z on mènera une parallèle à ZX.

Il résulte du principe démontré au numéro 373, que les parallèles comprises entre les côtés de l'angle Z—*o*—X sont entre elles comme les distances du point *o* aux points de division correspondants de la droite *o* — Z.

Ainsi, par exemple, *la parallèle du point* 1 est à *la partie* ZX comme le segment *o* — 1 est à la droite *o* — Z. Mais, puisque *o* — 1 est la dixième partie de *o* — Z, il s'ensuit que la petite parallèle du point 1 est la dixième partie de ZX.

On reconnaîtra de même que la parallèle du point 2 vaut $\frac{2}{10}$ de ZX, celle du point 3 vaut $\frac{3}{10}$, et ainsi de suite.

479. Voici la manière d'appliquer le principe qui vient d'être démontré :

Supposons, *fig.* 9, que l'on veuille construire une échelle dont chaque unité serait égale à la *centième partie* de EZ.

On élèvera la perpendiculaire Z — 100, sur laquelle on portera 10 parties égales quelconques.

On fera passer par chaque point de division une parallèle à la droite donnée EZ.

On élèvera par le point E, une perpendiculaire à la droite EZ, ce qui déterminera le point *o* sur la parallèle la plus élevée.

On divisera l'espace *o* — 100 en dix parties égales, et l'on divisera pareillement en dix parties égales la droite donnée EZ.

Enfin, on tracera, comme on le voit sur la figure, les droites inclinées, de manière à joindre le *premier* point de la ligne o — 100 avec le *second* de EZ ; le *second* de o — 100 avec le *troisième* de EZ, etc.

Si l'on fait ensuite la distance EH, égale à EZ, que l'on élève la perpendiculaire H — 100, et que l'on place tous les numéros comme ils le sont sur la figure, on aura une échelle extrêmement commode.

En effet, pour avoir une longueur égale à 23 parties, on placera l'une des pointes du compas ordinaire sur le point 3 de la ligne o — E, et l'autre pointe en a. La distance 3 — a que l'on obtiendra se composera des deux parties représentées 1° par la petite portion de parallèle comprise entre le point 3 et l'oblique du point o ; 2° de 2×10 ou 20 parties comprises entre les deux obliques qui aboutissent aux points o et 20 ; ce qui fera en tout $20 + 3 = 23$ *parties*. Pour obtenir 165 parties on portera les pointes du compas de c en u, ce qui donnera

$$cu = 100 + 5 + 60 = 165.$$

En portant vers la gauche, des distances égales à EZ, on pourra augmenter l'étendue de l'échelle autant que l'on voudra.

480. Pour construire une figure semblable à une autre, on fera deux échelles semblables. On peut augmenter la hauteur de la plus petite si l'on n'a pas assez de place pour écrire les chiffres ; mais on ne peut pas prendre à volonté les distances EZ, ez, qui doivent toujours être entre elles comme la figure donnée est à celle que l'on veut construire.

481. **Vernier**. Il existe encore un autre moyen d'obtenir les *dixièmes* d'unités sur une échelle dont les lignes de division ne pourraient pas être rapprochées sans inconvénient.

Le *vernier* VU, *fig.* 14, est une petite règle ajustée de manière à pouvoir glisser suivant toute la longueur de l'échelle principale EM. On marquera sur le vernier une longueur égale à 9 parties de l'échelle, et l'on divisera cette longueur en 10 parties égales, de manière que chacune des parties du vernier VU soit égale à $\frac{9}{10}$ de l'une quelconque des parties de l'échelle.

La différence entre une des parties de l'échelle et une partie du vernier sera par conséquent égale à

$$\frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

La droite dont on veut mesurer la longueur est toujours comprise entre le zéro de l'échelle et le zéro du vernier.

Si par exemple le zéro du vernier coïncidait avec le nombre 25 de l'échelle, on dirait que la longueur mesurée à compter du zéro de l'échelle vaut *vingt-cinq* parties.

Mais si le zéro du vernier V'U' est arrivé, comme on le voit sur la figure, entre les numéros 62 et 63 de l'échelle, il est évident que la longueur cherchée sera égale à 62 parties plus une fraction, qu'il s'agit d'évaluer en *dixièmes*.

Or, cela revient à savoir de combien de dixièmes le zéro s'est avancé depuis le moment où il coïncidait avec le numéro 62. Mais, puisque la différence entre une des parties du vernier et une partie de l'échelle est égale à *un dixième*, il s'ensuit que si l'on partait de la position désignée par VU, il faudrait que le vernier s'avançât de $\frac{1}{10}$ vers la droite, pour que son numéro 1 correspondît au numéro 26 de l'échelle.

Il faudrait que le vernier s'avançât de $\frac{2}{10}$, pour que le

numéro 2 pût coïncider ; de $\frac{3}{10}$ si l'on voulait faire coïncider le numéro 3, et ainsi de suite. De sorte que le numéro du vernier qui coïncide avec l'une des divisions de l'échelle, indique toujours de combien de *dixièmes* le zéro s'est avancé depuis le moment où il correspondait à un nombre exacte d'unités.

Donc, lorsque le vernier est parvenu dans la position V'U', on remarquera que le numero 7 coïncide avec l'une des divisions de l'échelle, et l'on doit en conclure que le zéro s'est avancé de $\frac{7}{10}$ depuis le moment où il coïncidait avec le numéro 62 ; de sorte que la longueur demandée est égale à 62 parties plus $\frac{7}{10}$.

482. Avec un peu d'habitude on pourra facilement évaluer les longueurs à moins d'*un vingtième*. En effet, si aucun point ne coïncidait, mais que les points 6 et 7 fussent tous les deux situés entre des lignes consécutives de l'échelle, on en conclurait que le point 6 a dépassé le moment de la coïncidence, tandis que le point 7 n'y est pas encore arrivé. La fraction cherchée serait donc plus grande que 6 et plus petite que 7 dixièmes ; mais il serait toujours facile de reconnaître lequel des points 6 ou 7 est le plus près de l'une des lignes de division de l'échelle, et, si les points 6 et 7 étaient également éloignés de la coïncidence, on pourait compter indifféremment 6 ou 7 dixièmes pour la fraction cherchée. Or, dans l'un comme dans l'autre cas, l'incertitude n'excédera pas *un demi-dixième* ou *un vingtième*.

483. Les moyens que nous venons d'indiquer pour déterminer les *dixièmes* de parties, sans les tracer sur une échelle, pourraient également être employés pour toutes

autres subdivisions. Ainsi, par exemple, si l'on avait marqué sur le vernier une quantité égale à 11 unités de l'échelle, et que l'ont eût partagé cette distance en 12 parties égales, on aurait déterminé par ce moyen des *douzièmes* d'unité.

LIVRE TROISIÈME.

MESURE DE L'ÉTENDUE.

CHAPITRE PREMIER.

Mesure des lignes droites, des arcs de cercles et des angles.

I.

484. **Définitions**. Jusqu'ici nous avons plutôt considéré la *forme* que l'*étendue* des figures.

Dans le premier livre nous avons comparé les polygones entre eux ; nous avons recherché dans quels cas leurs parties étaient égales ou inégales.

Dans le second livre nous avons étudié les rapports et les proportions provenant des diverses positions relatives des lignes.

Dans le troisième livre nous allons mesurer la *grandeur* et la *quantité d'étendue* que les figures occupent dans l'espace.

485. *Mesurer une quantité c'est la comparer à l'unité, afin de savoir combien de fois elle la contient.*

486. *L'unité* est une quantité dont la grandeur est déterminée, et à laquelle on est convenu de comparer toutes les autres quantités de même nature qu'elle. Il est à regretter que dans l'origine tous les hommes n'aient pas adopté d'un commun accord le même terme de comparai-

son. Malheureusement cela n'était pas possible, parce que les différents peuples n'ayant alors entre eux aucune relation, il en est résulté que chacun a choisi l'unité à sa fantaisie.

Nous avons vu dans l'arithmétique, quels étaient les embarras provenant du grand nombre d'unités différentes employées autrefois en France, et nous avons dit quels motifs ont fait adopter le *mètre* pour unité de longueur.

487. Nous supposerons donc que le lecteur a sous les yeux la longueur du *mètre,* et nous allons voir comment on obtient l'*expression* de la longueur d'une droite donnée.

488. Si l'on connaissait le *rapport numérique* de la quantité à l'unité on aurait l'expression de la grandeur de cette quantité en multipliant l'unité par le rapport. Ainsi par exemple exprimons par A la longueur de la droite proposée, par m la longueur du mètre, et supposons que l'on ait trouvé (357)

$$A : m :: 35 : 11,$$

on aurait, en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens,

$$11A = 35m;$$

d'où
$$A = \frac{35}{11} m = 3^{m},1818.$$

Ainsi, en se contentant des quatre premiers chiffres décimaux, on aurait la droite A égale à 3 *mètres* plus 1818 *dix millièmes de mètres.*

Mais, nous l'avons déjà dit, l'opération exposée au numéro 357 ne doit être considérée que comme une définition, comme un moyen de faire comprendre ce que l'on entend par *rapport numérique* et *commune mesure,* et l'on doit facilement reconnaître que le nombre des transpositions successives de compas, et les chances d'erreur qui peuvent en résulter rendraient cette manière d'opérer entièrement impraticable.

Dans les applications on procède de la manière suivante :

Mesure des lignes droites.

II.

489. **Mètre**. Soit, *fig*. 3, Pl. 13, une règle MV en bois ou en métal, dressé avec le plus grand soin.

Supposons que la longueur de cette règle soit égale à 1 *mètre*, et que cette longueur soit divisée en dix parties égales, chacune de ces parties vaudra un *décimètre*; chaque décimètre sera lui-même partagé en dix parties égales, que l'on nommera *centimètres*; chaque centimètre contiendra dix *millimètres*, et ainsi de suite.

Pour mesurer la longueur d'une droite AC, on portera le mètre MV de A en C autant de fois qu'il pourra y être contenu; supposons 1 fois par exemple, de sorte que l'on aura

AC = 1 mètre + BC.

Pour évaluer BC on reportera le mètre de B en D; et l'on verra que

BC = 3 décimètres + 6 centimètres.

Ainsi, la droite

AC = 1 mètre + 3 décimètres + 6 centimètres.
= 1,36.

On conçoit que le peu d'étendue de la figure est la seule raison qui nous ait empêché de tracer les lignes de divisions correspondantes aux millimètres.

490. Lorsque la question proposée exige que les quantités soient mesurées avec une grande exactitude, on peut employer un mètre muni d'un *vernier* (481).

Si chacune des parties du vernier était égale à $\frac{9}{10}$ de mil-

limètre, les longueurs mesurées seraient exactes à moins de 0,0001, et même à moins de 0,00005 (482).

491. **Corollaire** I. Le moyen que nous venons d'employer pour mesurer la ligne AC, peut également servir pour trouver, avec une approximation suffisante, *le rapport numérique de deux droites*. Ainsi, par exemple, supposons qu'une droite A soit égale à 2 *mètres* 46 *centimètres*, et qu'une autre droite B soit égale à 1 *mètre*, 783 *millimètres*, on aura, en divisant la première par la deuxième,

$$\frac{A}{B}=\frac{2,46\times 1\ \textit{mètre}}{1,783\times 1\ \textit{mètre}}=\frac{2,46}{1,783}=\frac{2,460}{1,783}=\frac{2460}{1783}=1,37.$$

492. **Cor**. On peut aussi employer le mètre pour construire une figure semblable à une autre. Dans ce cas, le rapport qui doit exister entre les côtés homologues des deux figures est exprimé en parties décimales du mètre. Ainsi, par exemple, lorsque l'on dit qu'un dessin est exécuté à 3 *millimètres* pour *mètre*, cela veut dire que sur ce dessin chaque longueur de 3 millimètres représente un mètre de la figure représentée.

Lorsqu'on dessine une carte ou un plan à l'échelle de *un dix-millième*, cela signifie que chaque dix-millième de mètre pris sur la carte représente une longueur de 1 mètre sur le terrain.

III.

493. **Chaîne**. Pour mesurer de grandes distances sur le terrain, on emploie la chaîne représentée par la figure 6. Cet instrument, dont la longueur totale est de *dix mètres* ou un *décamètre*, se compose de 50 petites tringles de fer séparées par des anneaux ; les longueurs des tringles sont calculées de manière que deux anneaux consécutifs soient éloignés de deux décimètres.

Il y a successivement quatre anneaux de fer et un anneau

de cuivre, de sorte que ces derniers indiquent la longueur de chaque mètre. La chaîne est terminée par deux anneaux assez allongés pour que l'on puisse y passer la main.

Deux hommes tenant la chaîne par les anneaux A et B, l'appliquent sur la terre, et, avant de la relever pour la porter à la suite, ils marquent les points correspondants aux extrémités; lorsque la chaîne a été posée 10 fois on a mesuré 100 mètres.

494. **Cordeau.** On emploie souvent aussi comme instrument de mesure, un ruban *inextensible*, ayant un ou plusieurs mètres de longueur.

Mesure des arcs.

IV.

495. **Définitions.** Il y a deux manières d'évaluer la grandeur d'un arc :

La mesure *absolue* est l'expression en mètres et fractions décimales du mètre, de la longueur qu'aurait cet arc si on le tirait par ses extrémités jusqu'à ce qu'on lui eût fait perdre sa courbure, et qu'il fût transformé en ligne droite : c'est ce que l'on appelle un arc *rectifié*.

La mesure *relative* est le rapport qui existe entre l'arc et la circonférence entière dont il n'est qu'une partie. Nous parlerons plus tard de la mesure absolue, nous allons voir de quel manière on peut obtenir la mesure relative.

V.

496. **Théorème** *Fig.* 12. *Si plusieurs cercles ont le même centre, tous les arcs interceptés entre deux rayons* AB, AC, *ont la même valeur relative.*

Démonstration. Les arcs BC, B'C', B''C'', sont semblables, puisqu'ils correspondent à un même angle au

centre (420). Ils peuvent donc être considérés comme lignes homologues par rapport aux circonférences dont ils font partie, de sorte que l'on aura
l'*arc* BC est à la *circonférence* qui a pour rayon AB, comme l'*arc* B'C' est à la *circonférence* qui a pour rayon AB', etc.

Par conséquent si l'arc BC vaut, par exemple, la *vingtième* partie de la circonférence entière à laquelle il appartient, l'arc B'C' vaudra également la *vingtième* partie de la circonférence entière correspondante.

497. **Corollaire**. Puisque tous les arcs concentriques compris entre les deux rayons AB, AC, ont la même valeur relative, il s'ensuit que le nombre qui exprimera la mesure de l'un d'eux sera également la mesure de l'autre. Par conséquent, pour avoir la mesure de l'arc BC, il suffira de mesurer l'un quelconque des arcs concentriques B'C', B''C'', etc.

VI.

498. **Rapporteur**. Supposons actuellement un demi-cercle en métal, divisé avec beaucoup de soin en parties égales, en 180 par exemple. Si l'on transporte le centre de ce cercle au centre de l'arc BC, dont on veut avoir la mesure relative, et que l'on fasse coïncider le rayon de l'instrument avec AB; le rayon AC coupera la circonférence du cercle en un point C', et le nombre de parties de l'arc B'C', fera connaître le rapport qui existe entre cet arc et la circonférence entière.

L'opération qui précède revient à prendre pour *unité d'arc* la 360e partie de la circonférence ou le *degré*. Ainsi, par exemple, si le rayon AC correspond au 34e point de division de la circonférence du rapporteur, on en conclura que l'arc B'C' est égal à $\frac{34}{360}$ de circonférence ou 34

degrés ; d'où il résulte que l'arc BC vaut pareillement $\frac{34}{360}$ ou 34 degrés de la circonférence à laquelle il appartient.

499. Afin de pouvoir évaluer les arcs qui ne contiennent pas un nombre exact de degrés, on est convenu que chaque degré se composerait de 60 parties égales, que l'on nomme *minutes ;* que chaque minute contiendrait 60 *secondes*.

On désigne le degré par le signe °
la minute par ′
la seconde par ″

Ainsi, un arc de 28 degrés 17 minutes 30 secondes, s'écrirait de la manière suivante :

28° — 17′ — 30″.

500. **Vernier circulaire**. Dans beaucoup d'instruments destinés à la mesure des arcs, on a ajouté un *vernier circulaire*, *fig.* 4. Le principe est le même que pour le vernier rectiligne. Ainsi, par exemple, si la circonférence ou le *limbe* était divisé en degrés, et que l'on eût fait 10 parties du vernier égales à 9 parties du cercle, on obtiendrait les *dixièmes de degrés*, et par conséquent la longueur de l'arc serait évaluée à moins de 6 *minutes*, et même, comme nous l'avons dit au numéro 482, à moins de 3 *minutes*.

Nous verrons plus tard par quels moyens cette exactitude peut être augmentée considérablement.

VII.

501. **Division de la circonférence**. Autrefois tous les géomètres s'accordaient pour diviser, comme nous venons de le faire, la circonférence en 360 parties égales ; mais, à

l'époque où le système métrique des poids et mesures fut adopté en France, on voulut partager également le cercle en parties décimales.

Il fut décidé alors, que le quart de la circonférence prendrait le nom de *quadrant;* que chaque quadrant se composerait de 100 parties égales, nommées *grades;* chaque grade de 100 parties nommées *minutes;* chaque minute de 100 *secondes.*

Ainsi, pour énoncer qu'un arc $a = 36^{gr.},4852$, on dirait que cet arc vaut 36 *grades*, 48 *minutes*, 52 *secondes.*

Des obstacles matériels puissants se sont opposés jusqu'ici, et s'opposeront sans doute encore longtemps à l'abandon de l'ancienne division du cercle.

En effet, parmi les praticiens qui ont souvent occasion de mesurer des arcs, il faut mettre en première ligne les astronomes, les ingénieurs, les géographes, les marins, etc. Ces classes, composées d'individus doués en général d'une haute intelligence, auraient promptement vaincu les difficultés de calcul provenant du passage de l'ancien système au nouveau, et, par la construction de tables bien disposées, ils auraient rendu facile la comparaison des observations passées aux observations futures, des cartes de géographie construites d'après la division sexagésimale, avec les cartes dressées suivant la nouvelle division. Mais, quand le lecteur connaîtra dans tous leurs détails, les admirables instruments employés pour la mesure des arcs, quand il pourra se faire une idée du talent, de l'adresse et de la patience des artistes chargés de leur exécution; il ne sera plus étonné de l'élévation du prix de ces instruments, et de la grande dépense à laquelle on serait entraîné s'il fallait d'un seul coup remplacer tous ceux qui existent, par d'autres qui seraient construits suivant la division décimale.

A la nécessité de remplacer tous les instruments de la

marine et des observatoires, se joindrait encore, pour le navigateur, l'embarras et la confusion qui pourraient résulter dans son esprit, de l'emploi simultané des cartes françaises, divisées en décimales, et des cartes étrangères, construites d'après l'ancienne division. Au moment du danger, il n'aurait pas le temps de faire les transformations nécessaires pour comparer les positions indiquées par les anciennes cartes, avec le résultat provenant des observations faites avec les nouveaux instruments.

Enfin, à toutes ces causes, il faut ajouter la privation presque absolue de tables de logarithmes s'accordant avec la division décimale du cercle.

Il résulte de ce qui précède que pour remplacer l'ancienne division par la nouvelle il faudrait :

1° Que tous les instruments des astronomes, des marins et des ingénieurs fussent changés ;

2° Que les tables de logarithmes fussent calculées suivant la nouvelle division ;

3° Que les cartes de géographie françaises ou *étrangères*, dont les marins font un usage journalier, fussent remplacées par des cartes décimales.

Jusqu'à ce que ces conditions aient été remplies, nous serons forcés, dans les exemples d'application donnés comme sujet d'exercices, d'adopter la division sexagésimale, à laquelle nous serions d'ailleurs nécessairement ramenés lorsque nous voudrions nous servir des logarithmes.

Enfin, si j'avais eu l'intention d'écrire un ouvrage de pure théorie, j'aurais peut-être préféré la division décimale; mais dans un traité de mathématiques destiné aux praticiens, j'ai cru devoir adopter la seule division qui jusqu'à présent soit en usage dans les applications. Nous verrons d'ailleurs par la suite, que les difficultés qui paraissent devoir en résulter ne sont qu'apparentes, puisque

dans la solution des triangles ce ne sont pas les arcs ni les angles qui entrent dans le calcul, mais les logarithmes de lignes droites qui en dépendent, et dont les valeurs sont toujours exprimées par des nombres décimaux.

502. D'ailleurs, si l'on voulait transformer l'expression sexagésimale d'un arc en expression décimale du même arc, il suffirait de se rappeler que

$$360 \text{ degrés} = 400 \text{ grades.}$$

D'où $9^\circ = 10^g$

$$1^\circ = \frac{10^g}{9} = 1^g,1111$$

$$1' = \frac{1^g,1111}{60} = 0^g,0185$$

$$1'' = \frac{0^g,0185}{60} = 0,0003$$

Avec ces rapports on pourra facilement calculer une table de transformation.

Mesure des angles.

VIII.

503. **Considérations générales**. On a dit que la géométrie avait pour but *la mesure de l'étendue*. Cette définition n'est ni complète ni exacte.

Elle n'est pas complète ; car lorsque l'on recherche les relations qui résultent du parallélisme ou de la perpendicularité des lignes droites on ne mesure pas l'étendue ;

Lorsque l'on construit des figures égales ou semblables entre elles on ne mesure pas l'étendue.

Lorsque l'on dessine un corps, lorsque l'on trace toutes les coupes nécessaires pour l'exécuter, on ne mesure pas l'étendue, etc., etc,

Non-seulement la définition précédente n'est pas complète, mais elle n'est pas exacte. En effet, si l'on considère la géométrie comme ayant pour but de mesurer les quantités d'étendue occupées par les figures ou par les corps, on n'aura aucune idée des moyens employés pour atteindre ce but.

Mesurer, suivant le sens que l'on attache vulgairement à cette expression, c'est comparer la quantité à l'unité pour connaître leur *rapport numérique*.

Mais cette opération n'est pas aussi simple qu'elle le paraît d'abord, ensuite elle est presque toujours impossible, et la plupart des théorèmes de géométrie ont pour but de donner les méthodes les plus simples pour *calculer l'étendue* et non pour la *mesurer*.

Nous venons de voir déjà un exemple à l'appui des réflexions qui précèdent. Ainsi, pour obtenir la mesure relative d'un arc BC, *fig.* 12, nous n'avons pas mesuré cet arc *directement*, ce qui aurait été fort difficile, puisqu'il aurait fallu faire construire exprès un rapporteur de même rayon que l'arc proposé ; mais nous sommes parvenus au même but d'une manière indirecte, et, sans mesurer l'arc BC lui-même, nous avons *obtenu sa valeur relative* en mesurant un autre arc B'C', qui avait le même rapport numérique avec la circonférence entière.

Ces considérations sont fort importantes, et, pour mieux faire comprendre la distinction que l'on doit faire entre la mesure directe et la mesure indirecte, je citerai quelques exemples pris en dehors de la géométrie.

Supposons que l'on veut mesurer la chaleur qui est dans un appartement, il est évident qu'on ne pourrait pas la comparer directement à l'unité de chaleur, qui n'est pas une quantité matérielle et sensible comme l'instrument que l'on emploie pour la mesure des lignes, il a donc fallu trouver d'autres moyens.

Après un grand nombre d'observations et d'expériences délicates, on est parvenu à s'assurer que la chaleur existant dans un lieu déterminé, augmente ou diminue *proportionnellement* à la hauteur de la colonne de mercure contenu dans un tube de verre. Dès ce moment le moyen de mesurer la chaleur a été trouvé, et lorsque la colonne de mercure a augmenté d'un *dixième* en hauteur, on a pu dire que la chaleur était elle-même augmentée d'un *dixième*.

Il est cependant bien évident que ce n'est pas la chaleur que l'on a mesurée, mais la hauteur du mercure, c'est-à-dire *une ligne droite*. Ainsi, l'une de ces quantités a pu servir de mesure à l'autre, parce qu'il avait été reconnu précédemment qu'elles variaient *dans le même rapport*.

Prenons pour second exemple la mesure du temps, il est certain que l'unité de temps n'est pas une quantité que l'on puisse comparer *directement* avec le temps que l'on veut mesurer; mais lorsqu'on fut parvenu à construire une machine dans laquelle l'extrémité d'une aiguille parcourt des espaces *proportionnels* au temps écoulé, la mesure du temps a été trouvée. Or, il est encore évident que ce n'est pas le temps que l'on mesure mais l'arc de cercle parcouru par l'extrémité de l'aiguille, et si l'on prend cet arc pour la mesure du temps, c'est parce que ces deux quantités varient *dans le même rapport*.

C'est ainsi, comme nous le verrons par la suite, que l'on remplace presque toujours les quantités que l'on veut mesurer par d'autres quantités qui leur sont *proportionnelles*.

504. En général, *les lignes droites et les arcs de cercles sont les seules grandeurs que l'on mesure en les comparant directement à l'unité*. Quant aux autres quantités *on ne les mesure pas*, on *calcule* leur étendue, et pour cela il faut rechercher les rapports qui existent entre elles,

et d'autres quantités dont la mesure est plus facile à obtenir.

C'est par l'étude et par la comparaison de tous ces rapports que nous parviendrons à *obtenir la mesure de toutes les parties de l'espace.*

IX.

505. **Théorème**. *Lorsque deux angles ont leurs sommets au centre d'un même cercle ou de cercles égaux, ils sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés.*

Démonstration. Supposons que les angles *acb*, ACB, *fig.* 8, soient entre eux comme 3 : 5, ou, ce qui revient au même, supposons qu'il existe un angle *m* contenu *trois* fois dans le premier et *cinq* fois dans le second ; chacun des trois angles qui composent *acb* sera égal à l'un quelconque des cinq angles qui composent ACB, et les arcs interceptés *ao*, AO, seront égaux de part et d'autre (188). Or, si l'on prend un de ces petits arcs pour terme de comparaison, et si l'on exprime sa valeur par *m'* on aura

$$arc\ ab = 3m'$$
$$arc\ \mathrm{AB} = 5m'.$$

Divisant la première équation par la seconde on obtient

$$\frac{arc\ ab}{arc\ \mathrm{AB}} = \frac{3m'}{5m'} = \frac{3}{5},$$

ce qui donne la proportion

$$arc\ ab : arc\ \mathrm{AB} :: 3 : 5.$$

Mais on avait la proportion

$$angle\ acb : angle\ \mathrm{ACB} :: 3 : 5.$$

On aura donc, à cause du rapport commun,

$$angle\ acb : angle\ \mathrm{ACB} :: arc\ ab : arc\ \mathrm{AB}.$$

506. **Remarque**. En supposant que les deux angles *acb*, ACB, étaient entre eux comme les nombres 3 et 5, il est évident que nous n'avions pas d'autre but que de

fixer les idées par un exemple, et le facteur m' ayant disparu par la réduction, nous devons en conclure que l'égalité des deux rapports ne dépend pas de la grandeur de l'arc employé comme mesure commune; par conséquent la proportion existera toujours lors même que cette commune mesure sera infiniment petite, ou, en d'autres termes, lorsque le rapport des deux angles comparés sera incommensurable (362).

Dans la suite, et pour abréger, nous admettrons que l'existence d'un rapport est démontrée d'une *manière générale,* toutes les fois que les réductions auront fait disparaître la commune mesure auxiliaire employée pour faciliter la démonstration.

X.

507. **Théorème**. *Lorsqu'un angle a son sommet au centre d'un cercle, il a pour mesure l'arc compris entre ces côtés.*

Démonstration. Pour obtenir la mesure d'un angle il faut trouver le *rapport numérique* qui existe entre cet angle et l'unité; mais puisque les angles au centre sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés (505), il est évident que l'on pourra *prendre le rapport des arcs pour celui des angles*. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'exprimer la mesure de l'angle *acb, fig.* 8, et que l'on eût pris l'angle ACB pour unité, on aurait

$$\frac{\textit{angle } acb}{\textit{angle } \mathrm{ACB}} = \frac{\textit{arc } ab}{\textit{arc } \mathrm{AB}} = \frac{3}{5};$$

d'où

$$\frac{\textit{angle } acb}{\textit{angle } \mathrm{ACB}} = \frac{3}{5};$$

et par conséquent

$$\textit{angle } acb = \frac{3}{5}\,\textit{angle } \mathrm{ACB}.$$

508. **Corollaire** I. Dans les applications on prend ordinairement pour *unité d'angle* la 90e partie de l'angle droit. Cet angle, que l'on nomme *degré,* est compris 360 fois dans quatre angles droits ; d'où il résulte que si le sommet de ce petit angle était placé au centre d'un cercle, il comprendrait exactement l'arc d'un degré entre ses côtés.

509. **Cor.** II. Il résulte évidemment de ce qui précède, que les instruments imaginés pour *mesurer les arcs* serviront également pour *mesurer les angles,* et l'on verra par la suite que c'est précisément là leur véritable destination. Ainsi, par exemple, pour mesurer l'angle BAC, *fig.* 12, on placera au point A le centre du *rapporteur,* et l'on fera coïncider le côté AB avec le rayon qui correspond au point *o* de la circonférence. Le nombre de degrés compris dans l'arc B'C' indiquera combien de fois l'angle BAC contient *l'angle d'un degré* qui représente l'unité.

Le point C' correspondant sur la figure, au 34e point de division du limbe, on en conclura que l'angle BAC vaut 34 degrés.

510. **Cor.** III. Lorsqu'un angle B'AE est droit, il intercepte entre ses côtés le quart de la circonférence, et par conséquent sa mesure est égale à 90 degrés.

Lorsque deux angles B'AC', C'AE sont *compléments* l'un de l'autre (57), leur somme est égale à 90 degrés

Lorsque deux angles B'AC', C'AD, sont *suppléments* l'un de l'autre (61), leur somme est égale à 180 degrés.

511. **Cor.** IV. Si le sommet de l'angle donné était placé sur la circonférence du rapporteur, il faudrait prendre pour mesure la moitié de l'arc de cercle compris entre les côtés. Ainsi on aurait (190)

$$\textit{l'angle } \mathrm{B'DC'} = \frac{\textit{angle } \mathrm{B'AC'}}{2} = \frac{\textit{arc } \mathrm{B'C'}}{2} = \frac{34}{2} = 17 \textit{ degr.}$$

On aurait également (195)

$$l'angle\ HC'D = \frac{arc\ C'ED}{2} = \frac{180 - 34}{2} = \frac{146}{2} = 73\ degr.$$

Il ne faut pas oublier, lorsqu'on dit qu'un *angle* est égal à un *arc*, qu'il s'agit seulement de l'égalité des deux *nombres* qui expriment leurs mesures relatives.

512. **Cor.** V. On peut facilement, avec un bon rapporteur, diviser la circonférence d'un cercle en parties égales.

Supposons, par exemple, que l'on veuille déterminer la 13ᵉ partie de la circonférence, on divisera 360 par 13, et l'on obtiendra pour quotient

$$27\ degrés\ \text{plus}\ \frac{9}{13} = 27\ degrés,\ 41\ minutes,\ 32\ secondes.$$

Pour inscrire un polygone régulier de 19 côtés, on calculerait exactement les nombres de degrés, minutes et secondes des arcs correspondants à $\frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19}$, etc., de 360 degrés.

XI.

513. **Instruments.** Le rapporteur, *fig.* 12, est employé ordinairement pour mesurer les arcs ou les angles que l'on trace sur le papier, mais lorsqu'il s'agit d'obtenir la mesure des angles formés par des lignes droites dirigées de toutes les manières dans l'espace, il faut ajouter à cet instrument des modifications importantes.

514. **Rayon visuel.** Les rayons de lumière qui éclairent les corps, sont renvoyés dans toutes les directions par les différents points de leur surface; quelques-uns de ces rayons pénètrent dans notre œil, et y produisent une sensation, d'où résulte pour nous le phénomène de la *vision*. Sans entrer ici dans les détails de cette question composée, nous admettrons comme suffisamment exact, *pour le moment*, que le rayon de lumière envoyé dans notre œil, par le point que

nous regardons, est une ligne droite à laquelle nous donnerons le nom de *rayon visuel*.

515. **Graphomètre**, *fig.* 11. Cet instrument n'est autre chose qu'un rapporteur monté sur un pied à trois branches, que l'on peut écarter ou rapprocher à volonté, pour donner plus de stabilité à l'instrument, et pour changer sa hauteur. Par le moyen d'une pièce nommée *genou*, on peut incliner le plan du graphomètre dans toutes les directions.

Le diamètre *ac*, est terminé par deux plaques de métal perpendiculaires au plan du cercle; chacune de ces deux plaques, nommés *pinnules*, est percée par une fente et par une petite fenêtre. D'un côté, la fenêtre est au-dessus de la fente et le contraire a lieu pour la pinnule opposée, de sorte que la fenêtre de l'une des deux pinnules se trouve toujours à la même hauteur que la fente de la pinnule par laquelle on regarde.

Pour viser un objet, on place l'œil auprès de la fente, et l'on fait mouvoir le plan de l'instrument jusqu'à ce que l'on puisse voir l'objet à travers la petite fenêtre qui est vis-à-vis.

Cette fenêtre est traversée dans toute sa hauteur par un fil bien tendu, que l'on amène exactement au milieu de l'objet que l'on regarde.

La règle *vu*, mobile autour du centre, se nomme une *alidade*. Les extrémités taillées en biseau forment deux *verniers* au moyen desquels on augmente, comme nous l'avons vu (481) l'exactitude de la division.

Pour mesurer un angle avec le graphomètre, on fait tourner le plan du cercle jusqu'à ce que l'on puisse voir par les pinnules les objets vers lesquels sont dirigés les deux rayons visuels.

516. **Cercle**. *Fig.* 13. Au lieu d'un graphomètre on emploie souvent un cercle entier dans lequel les alidades sont remplacées par des lunettes.

517. **Mire**. *Fig.* 16. S'il n'existe pas d'objet assez net pour déterminer d'une manière bien précise la direction du rayon visuel, on emploie une planche *mn* divisée en carrés noirs et blancs. Les deux droites formant les côtés de ces carrés se coupent en un point vers lequel il est facile de diriger les lunettes ou les alidades.

Quelquefois, lorsque l'on opère la nuit, on emploie des signaux de feu.

518. **Planchette**. Lorsque l'on veut tracer de suite sur le papier l'angle formé dans l'espace par les rayons visuels, on emploie une planche à dessin, montée sur un pied comme le graphomètre ou le cercle, *fig.* 11 et 13. On place sur la planche une règle ou alidade, terminée par deux pinnules, et lorsqu'en regardant par les pinnules on a fait coïncider la direction de l'alidade avec celle du rayon visuel, on trace immédiatement cette ligne au crayon; la pointe du crayon étant dirigée par l'alidade elle-même.

Le moyen que nous venons d'indiquer est très-commode lorsque l'on veut tracer *rapidement* sur le papier les angles formés par les rayons visuels dirigés vers un grand nombre de points; mais le résultat est loin d'être aussi exact que celui que l'on obtient en mesurant ces angles avec le graphomètre ou le cercle, et les traçant ensuite avec le rapporteur.

Les principes qui seront développés dans la suite, nous permettront de résoudre ces questions avec une exactitude presque absolue.

XII.

519. **Définitions**. Les angles ont principalement pour but de déterminer la direction des lignes droites en expri-

mant leur inclinaison par rapport à d'autres lignes dont la position est connue.

Parmi toutes les directions qu'une droite peut prendre dans l'espace, il y en a quelques-unes qui sont la conséquence de lois naturelles trop intimement liées avec les travaux de l'ingénieur pour qu'il soit permis d'en reculer la définition.

La connaissance de ces lois facilitera l'étude de la théorie, en indiquant au lecteur le but que l'on s'est proposé dans la recherche des principes.

520. **Ligne verticale**. Si un corps quelconque est abandonné à lui-même, et qu'il ne soit poussé dans aucun sens, il se dirige aussitôt vers la terre en parcourant une ligne droite que l'on nomme une *verticale*.

521. La force inconnue qui entraîne ce corps vers la terre se nomme *pesanteur*. Ainsi *la verticale est la direction de la pesanteur*.

522. **Fil à plomb**. La direction d'une verticale peut être rendue sensible en suspendant un morceau de plomb ou de cuivre à un fil *ac*, *fig*. 1. C'est ce que l'on nomme un *fil à plomb*.

523. En faisant coïncider le fil à plomb avec la droite tracée parallèlement au bord extérieur de l'une des deux branches de l'équerre, *fig*. 2, on sera certain que cette branche est située dans une position verticale.

524. **Plan vertical**. *Un plan est vertical* toutes les fois qu'il contient une droite verticale.

Ainsi, Lorsqu'on aura reconnu qu'une surface est plane (28), il suffira, pour reconnaître si elle est verticale, d'y appliquer le côté vertical de l'équerre, *fig*. 2.

525. On agira de la même manière lorsque l'on voudra placer verticalement le plan du graphomètre ou du cercle, *fig*. 11 et 13, ou bien encore on dirigera l'alidade ou la lunette mobile, vers deux points situés sur une droite

ou dans un plan dont la position verticale serait connue et vérifiée bien exactement.

526. **Ligne horizontale**. Toute droite perpendiculaire à une verticale est une ligne *horizontale* ou *de niveau*.

On peut reconnaître si une ligne est de niveau en y appliquant le côté *mn* de l'équerre, *fig.* 2 ; il faut en même temps s'assurer que l'autre branche est bien exactement verticale (523).

527. On peut encore vérifier une ligne horizontale au moyen de l'équerre isocèle, *fig.* 5. Si le fil à plomb passe exactement au milieu de la droite *ac*, on pourra en conclure que sa parallèle *mn*, est une ligne de niveau.

528. **Plan horizontal**. Lorsqu'un plan contient deux lignes de niveau, il est *horizontal ;* il sera démontré plus tard que toutes les droites tracées dans ce plan sont de niveau.

529. La détermination des lignes de niveau est tellement importante dans les applications de la géométrie, que l'on a dû chercher à composer des instruments plus parfaits que ceux dont nous venons de donner la description.

530. **Niveau d'eau**. Une des propriétés des liquides, c'est que, lorsqu'ils sont en repos, leur surface supérieure est toujours horizontale. De sorte que si, dans un bassin ou dans un étang, on choisit deux points quelconques situés à la surface de l'eau, la droite qui joindra ces deux points sera de niveau.

D'après cela, concevons, *fig.* 14, un tuyau en métal, dont les extrémités recourbées sont terminées par deux tubes en verre.

La communication étant libre d'un tube à l'autre, au moyen du conduit *vu*, si l'on verse par l'une des extrémités

un liquide quelconque, on le verra paraître de suite dans le tube opposé, et quelle que soit la direction de l'instrument, la droite *ac* sera toujours une ligne de niveau.

Pour rendre plus apparente la ligne supérieure du liquide, on y introduit ordinairement une matière colorante.

531. **Niveau à bulle d'air**. Le plus parfait de tous les instruments de niveau, est celui que nous allons décrire.

Concevons un tube de verre courbé circulairement comme on le voit sur la *fig.* 9. Si on le remplit *presque* entièrement avec un liquide coloré, il restera une petite goutte ou *bulle* d'air qui viendra toujours se placer dans la partie la plus élevée du tube, quelle que soit, du reste, l'inclinaison de la corde *ac*; et lorsque cette corde sera horizontale, il est évident que la bulle d'air devra occuper exactement le milieu de l'arc *amc*.

On renferme ordinairement le tube de verre, *fig.* 10, dans une enveloppe de métal qui le garantit contre le choc des objets extérieurs.

Sur la *fig.* 9, on a augmenté la courbure afin de mieux faire comprendre le principe; mais sur la figure 10, cette courbure est insensible.

Lorsque la plaque à laquelle est attaché le niveau, est placée horizontalement, la bulle d'air doit occuper exactement le milieu de la longueur du tube.

XIII.

532. **Usages du niveau**. Les instruments de niveau ne servent pas seulement à déterminer les lignes horizontales; ils sont encore utiles lorsque l'on veut connaître la diffé-

rence de hauteur de deux points, ou l'inclinaison de la ligne droite qui les joint. Ainsi, par exemple, si l'on place la mire *mn*, *fig.* 16, dans le prolongement d'une ligne de niveau, on connaîtra par le nombre de divisions de la règle *ac* quelle est la différence de hauteur entre le point que l'on regarde et celui où est situé l'instrument.

533. Pour mesurer l'inclinaison ou la *pente* d'une ligne droite, on amènera le plan du graphomètre ou du cercle dans une position verticale (525), puis avec un niveau portatif, ou faisant partie de l'instrument, on donnera une direction horizontale à la lunette ou alidade fixe, après quoi, il ne restera plus qu'à mesurer l'angle que cette ligne de niveau, fait avec la droite dont on veut connaître l'inclinaison.

534. Pour placer le cercle ou le graphomètre dans une position horizontale, on posera le niveau sur le plan de l'instrument dans deux directions différentes (529). Quelques cercles sont munis, à cet effet, de deux niveaux à demeure et perpendiculaires l'un à l'autre.

XIV.

535. **Définitions**. Il est essentiel de remarquer que par un point pris à volonté dans l'espace, on ne peut faire passer *qu'une seule* ligne verticale, tandis que l'on peut mener par ce point une *infinité* d'horizontales différentes.

Toutes ces horizontales seront dans un même plan (528), qui sera le *seul* que l'on puisse concevoir par le point donné, tandis que par la verticale qui contient ce point, on pourra faire passer une *infinité* de plans verticaux.

536. En général, *par un point donné, on ne peut faire passer qu'une seule verticale, par laquelle on peut concevoir une infinité de plans verticaux.*

537. *Par un point donné, on ne peut faire passer*

qu'un seul plan horizontal, dans lequel on peut tracer une infinité de lignes de niveau.

Ces remarques seront très-utiles par la suite.

XV.

538. **Méridienne.** Parmi toutes les lignes horizontales qui passent par un point donné, il y en a *une* qui doit particulièrement attirer notre attention : c'est la direction que prend l'ombre d'une droite verticale à *midi*.

Cette direction se nomme une *méridienne*, on lui donne aussi le nom de ligne *nord et sud*. Si, à midi, on tournait le dos au soleil, on regarderait le *nord*, et l'extrémité opposée de la méridienne serait le *sud*.

539. Un phénomène naturel permet de retrouver à chaque instant la direction de la méridienne. En effet, concevons, une aiguille en métal, ayant la forme d'un losange très-allongé.

Cette aiguille, placée sur un pivot, peut se mouvoir en tous sens, avec la plus grande facilité. Or, si l'on aimante la pointe de l'aiguille, elle se tournera aussitôt vers le nord, et sa direction déterminera celle de la méridienne.

540. **Boussole.** Supposons, *fig.* 7, qu'une aiguille aimantée soit placée dans une boîte dont le fond contient un cercle divisé, le zéro étant situé au point A. Si l'on tourne la boîte de manière que le diamètre AB coïncide avec le rayon visuel KH, il est évident que le numéro du cercle, correspondant à l'extrémité N de l'aiguille, indiquera le nombre de degrés de l'angle NOK, compris entre le rayon visuel KH et la méridienne NS.

541. Pour viser les objets, on adapte à la boussole une alidade ou une lunette ; mais si l'on faisait coïncider cette pièce avec le diamètre AB, on cacherait les divisions du

cercle, surtout lorsque l'angle mesuré est très-petit. Pour éviter cette difficulté, on attache la lunette sur l'un des côtés de la boîte, ce qui est la même chose, puisque les deux angles NOK, NSU sont évidemment égaux, comme internes-externes.

La boussole peut être posée sur une planchette ou montée sur un pied à trois branches, comme le graphomètre ou le cercle, *fig.* 11 et 13.

542. Pour mesurer avec la boussole l'angle formé par les deux rayons visuels OK, OK', on fera tourner la boîte jusqu'à ce que la lunette occupe les deux positions successives désignées par les lettres VU, V'U'.

Si l'angle NOK provenant de la première position, est égal, par exemple, à 48 *degrés*, et que l'angle NOK' soit de 60 *degrés*, on aura

l'angle KOK' = NOK' — NOK = 60 — 48 = 12 *degrés*.

543. **Déclinaison de l'aiguille aimantée.** Nous avons supposé que la direction de l'aiguille coïncidait exactement avec celle de la méridienne. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement exacte, et nous ne l'avons admise d'abord, que pour faciliter la démonstration du principe.

L'aiguille s'écarte un peu de la méridienne à droite ou à gauche, suivant le lieu et suivant l'heure de la journée; mais des observations nombreuses ayant fait connaître, pour chaque lieu, l'angle que ces deux lignes font entre elles, on peut toujours retrouver la direction exacte de l'une d'elles, lorsque l'on connaît celle de l'autre.

544. D'ailleurs, il n'est utile d'avoir égard à la déclinaison, que lorsqu'on veut mesurer l'angle qu'une droite fait avec la méridienne; car lorsqu'il s'agit de l'angle formé par deux rayons quelconques OK, OK', il est évident que la direction de la méridienne devient indifférente,

et que l'on obtiendrait le même résultat si l'aiguille était tournée vers tout autre point de l'horizon.

545. **Inclinaison de l'aiguille.** Nous devons ajouter encore que l'aiguille n'est pas rigoureusement horizontale, mais l'inclinaison peut être rendue insensible par un contre-poids.

XVI.

546. **Équerre d'arpenteur.** Cet instrument, représenté par la fig. 15, est monté sur un pied que l'on enfonce verticalement dans la terre. La section par un plan horizontal est un *octogone régulier*. Chacune des faces correspondantes aux côtés de l'octogone est percée par des fentes comme les pinnules du graphomètre. Les rayons visuels, traversant les faces opposées, se croisent au centre où ils forment *huit* angles de 45 degrés chacun.

Il est évident qu'avec cet instrument on pourra déterminer les angles de 45, 90 et 135 degrés.

547. Pour déterminer les angles de 90 degrés, on emploie quelquefois aussi un cercle entier, muni de quatre pinnules fixées à demeure aux extrémités de deux diamètres qui se coupent à angles droits.

Il est évident que l'on peut obtenir les mêmes résultats avec le cercle ou le graphomètre ordinaire; mais lorsqu'on n'a pas besoin de mesurer des angles de toutes les grandeurs, on préfère les instruments que nous venons de décrire, parce qu'ils sont moins embarrassants.

CHAPITRE II.

Longueur des lignes.

I.

548. **Droites inaccessibles**. Nous avons dit, au numéro 504, que les droites et les arcs de cercle étaient les seules quantités que l'on pût mesurer directement en les comparant aux unités ; mais les lignes droites elles-mêmes ne sont pas toutes immédiatemement mesurables. En effet, il arrive souvent que l'on veut obtenir la distance de deux points dont on ne peut pas approcher. D'autres fois il est impossible de tracer la droite qui représente cette distance.

Dans ce cas, on *calcule* la longueur de cette ligne en cherchant le rapport numérique qui existe entre elle et quelque autre droite plus facile à mesurer.

Nous allons éclaircir ce qui précède par des exemples.

II.

549. **Problème**. *Mesurer la hauteur d'une tour au sommet de laquelle on ne peut pas monter.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 14. On commencera par mesurer la longueur d'une droite MN, horizontale et dirigée vers le pied de la tour. On y ajoutera la demi-largeur NO de la tour, et l'on connaîtra l'horizontale CA.

On placera ensuite le plan d'un graphomètre ou d'un cercle dans une position telle, qu'en faisant mouvoir la

lunette ou l'alidade mobile, le rayon visuel ne quitte pas l'axe BA de la tour (525).

On dirigera la lunette ou l'alidade fixe dans la direction horizontale CA, puis on mesurera l'angle vertical BCA.

Quand cela sera fait, on construira, sur une planche à dessin, un triangle rectangle *bca*, tel que l'angle *c* soit égal à l'angle C *mesuré* sur le terrain, et que la droite *ca*, contienne autant de parties égales, prises sur une échelle quelconque, qu'il y a de mètres dans la longueur de la droite *mesurée* MN, augmentée de la demi-largeur de la tour.

Les deux triangles *bac*, BAC, seront alors semblables (388), et leurs côtés seront proportionnels.

Par conséquent la droite AB contiendra autant de mètres qu'il y aura de parties dans le côté *ab* du triangle auxiliaire.

Supposons, par exemple, que la droite CA contienne 40 mètres, et que *ca* soit égale à 40 parties d'une échelle quelconque, il est évident que si le côté *ab* contient 52 de ces mêmes parties, le côté AB vaudra 52 mètres.

550. On évitera la construction d'une échelle particulière en prenant l'une des subdivisions du mètre pour unité du triangle auxiliaire *cab*. Ainsi, par exemple, si l'on a fait *ca* égale à 40 *millimètres*, on aura *ab* égale à 52 *millimètres*, et l'on en conclura que AB vaut 52 *mètres*.

Lorsqu'on aura obtenu la valeur de AB, il suffira d'y ajouter la hauteur de l'instrument pour avoir celle de la tour.

551. **2e solution.** *Fig.* 2. Si l'on n'avait pas d'instrument pour mesurer l'angle C, on pourrait quelquefois, au moyen de l'ombre, obtenir une mesure *approximative* de la hauteur demandée.

On placerait une règle ou un bâton dans une position *verticale ab* et l'on mesurerait les longueurs des ombres

ac, AC, du bâton et de l'objet dont on veut calculer la hauteur. Il ne resterait plus qu'à établir la proportion

$$ac : AC :: ab : AB.$$

Les trois premiers termes étant connus, il sera facile de calculer le quatrième.

Cette solution provient de ce que les rayons solaires *bc*, BC, sont parallèles; d'où il résulte que les deux triangles *bac*, BAC, sont semblables; pourvu toutefois que le bâton ait été placé bien verticalement.

552. Quelque imparfaites que soient les solutions de cette espèce, on aurait tort de les rejeter d'une manière absolue. Indépendamment de leur utilité dans des circonstances où l'on est privé de moyens plus exacts, elles contribuent à former le coup d'œil par la comparaison raisonnée des relations qui existent entre les dimensions de l'étendue.

On n'a pas toujours le temps ni la possibilité de faire des opérations rigoureuses, et l'on peut quelquefois tirer un parti fort utile d'une solution approximative, pourvu que l'on n'accorde pas au résultat plus de confiance qu'il n'en mérite.

III.

553. **Problème.** *Fig.* 3. *Mesurer la hauteur d'un monument dont on ne peut pas approcher.*

Solution. On mesurera le plus exactement possible une droite horizontale BC, dirigée vers l'objet dont on veut connaître la hauteur.

On transportera successivement un cercle ou un graphomètre aux points B et C; puis on prendra la mesure des deux angles ABC, ACP.

On construira ensuite sur le papier un triangle *abc* semblable au triangle ABC, et l'on tracera la droite *ap* perpendiculaire sur le prolongement de *bc*. Il ne restera

plus alors qu'à chercher le quatrième terme de la proportion $bc : BC :: ap : AP$. (413)

554. **Corollaire**. La méthode précédente peut évidemment servir à mesurer la hauteur d'une montagne, pourvu que l'on puisse mesurer une ligne de niveau BC, située dans le plan qui contient la verticale abaissée du sommet.

Lorsque cette condition n'aura pas lieu, il faudra employer des moyens qui seront développés plus tard.

IV.

555. **Problème**. *Fig.* 4. *Mesurer la largeur d'une rivière que l'on ne peut pas traverser.*

Solution. On remarquera sur la rive opposée un objet apparent, tel qu'un arbre, une pierre A, etc.

On se placera ensuite au point D, de manière que la droite AD soit, autant que possible, perpendiculaire à la direction de la rivière, et l'on fera placer une mire au point C.

On tracera ensuite la droite DB, que l'on mesurera le plus exactement qu'il sera possible; puis, avec le cercle ou le graphomètre, on prendra la mesure des angles ABD, CBD, ADB.

Enfin, on construira la figure *acdb* semblable à ACDB, et l'on calculera le quatrième terme de la proportion

$$bd : BD :: ac : AC.$$

V.

556. **Problème**. *Fig.* 5. *Mesurer la distance de deux points dont on ne peut pas approcher.*

Solution. On cherchera une place où le terrain soit assez uni pour que l'on puisse y tracer une droite AB, que l'on mesurera très-exactement.

On transportera ensuite le graphomètre ou le cercle aux deux points A et B; puis on mesurera les quatre angles DAB, CAB, CBA, DBA.

Enfin, on tracera sur le papier la figure *abcd* semblable à ABCD, et l'on calculera le quatrième terme de la proportion $ab : AB :: dc : DC$.

Il est évident que les montagnes, les arbres, les maisons, qui pourront exister entre les deux points D et C, ne changeront rien à la manière d'opérer, et qu'il suffit que ces deux points puissent être vus de chacune des extrémités de la base AB.

VI.

557. **Remarque.** Les solutions précédentes peuvent laisser quelque chose à désirer sous le rapport de l'exactitude, parce que si l'on fait une petite erreur en traçant la figure sur le papier, il en résultera évidemment une erreur proportionnelle lorsque l'on calculera la ligne homologue de la grande figure semblable qui est censée exister sur le terrain.

On pourra diminuer les erreurs en dessinant la figure auxiliaire avec beaucoup de soin ; mais nous verrons par la suite, comment le calcul donne les moyens de résoudre les mêmes questions avec une exactitude beaucoup plus grande.

Ce qui précède a seulement pour but de faire comprendre comment on peut calculer la longueur des lignes inaccessibles lorsque l'on connaît leur rapport à d'autres lignes plus facilement mesurables.

VII.

558. **Lignes courbes.** La mesure d'une courbe ABCD, *fig.* 6, est l'expression en mètres et fractions décimales de

mètre, du chemin qu'il faudrait parcourir si l'on suivait cette ligne d'une extrémité à l'autre en contournant toutes ses sinuosités.

La définition précédente suffit pour faire comprendre combien il est difficile d'obtenir directement la mesure des courbes; car il faudrait pour y parvenir que l'instrument sur lequel on aurait tracé le mètre et ses subdivisions fût assez flexible pour qu'il pût se prêter à toutes les variations de courbure de la ligne qu'il s'agirait de mesurer.

Dans le plus grand nombre de cas on peut se contenter des moyens que nous allons indiquer.

559. Si la courbure est peu sensible, on appliquera l'unité contre la courbe, en négligeant la petite différence qui résulte de ce que l'on remplace à chaque instant un arc par sa corde. Mais, s'il y a beaucoup de sinuosités, il faut partager la ligne donnée ABCD en parties *très-petites*, et reporter toutes ces parties à la suite les unes des autres, sur une droite A'D' dont on mesure ensuite la longueur.

La droite A' D' représente la courbe ABCD *rectifiée*.

560. Pour diminuer autant que possible l'erreur qui provient de ce que l'on considère comme une ligne droite chacun des petits arcs qui composent la courbe donnée, il faut rapprocher les points de divisions dans les parties où la courbure est très-grande.

VIII.

561. **Courbes semblables.** *Fig.* 7. Supposons que les courbes *ab*, AB, soient semblables; si l'on connaît la longueur de l'une d'elles, et le rapport qui existe entre leurs dimensions, cela dispense de mesurer la seconde. En effet, les deux courbes proposées pouvant être considérées comme

des polygones semblables, d'un nombre infini de côtés, il s'ensuit que leurs contours ou périmètres sont entre eux comme deux quelconques de leurs lignes homologues. Or, si les unités des deux échelles qui ont servi à construire ces courbes sont entre elles comme 3 : 5, il est évident que l'on aura la proportion suivante :

$$\text{courbe } ab : \text{courbe AB} :: 3 : 5.$$

D'où l'on déduit

$$\text{courbe AB} = \frac{5 \times \text{courbe } ab}{3}.$$

Ainsi, par exemple, si l'on savait que la courbe *ab* soit égale à 34 mètres, on aurait

$$\text{courbe AB} = \frac{5 \times 34}{3} = \frac{170}{3} = 56\ ,67;$$

donc la courbe AB vaudrait 56 *mètres* 67 *centimètres*.

562. En général, *toutes les fois que l'on connaît le rapport numérique de deux quantités, et l'une d'elles, cela dispense de mesurer l'autre*, c'est pourquoi la recherche des rapports numériques est une question très-importante pour les applications.

IX.

563. **Circonférence du cercle.** Les difficultés que nous venons de rencontrer dans la mesure des courbes, existent également, lorqu'il s'agit d'une circonférence de cercle, mais la nature particulière de cette ligne, et son utilité dans la plus grande partie des applications mathématiques ne permettent plus de se contenter des solutions que nous venons d'indiquer. Il a donc fallu chercher les moyens de calculer l'étendue de la circonférence avec une exactitude, déterminée dans chaque cas, par la nature de la question proposée.

Pour atteindre ce but, on a commencé par démontrer que les circonférences de cercle sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres (417, 418), et l'on a pu conclure de là, que, si l'on connaissait exactement le *rapport numérique* qui existe entre une circonférence et son diamètre, on pourrait se dispenser de mesurer la première de ces deux lignes lorsque l'on connaîtrait la longueur de l'autre.

564. Archimède est le premier qui se soit occupé de calculer ce rapport.

Il a trouvé que si l'on partageait le diamètre d'un cercle en *sept* parties égales, la circonférence contiendrait à peu près *vingt-deux* de ces parties, ce qui donne la proportion : *Diam.* : *circonf.* :: 7 : 22.

Ce rapport, qui n'est qu'approché, peut suffire dans beaucoup de circonstances ; mais, lorsque les instruments destinés à la mesure des angles eurent atteint une plus grande perfection, on sentit qu'il fallait donner au calcul une exactitude correspondante.

Les géomètres ont donc repris la question résolue par Archimède, et sont arrivés à des résultats plus parfaits. L'un d'eux, Adrien Métius, a reconnu que, si le diamètre était partagé en 113 parties, la circonférence en contiendrait 355. Enfin, plus tard, en prenant le diamètre pour unité, on a trouvé que la circonférence devait être exprimée par 3,1415926... etc. L'exactitude a été poussée jusqu'au *cent cinquantième* chiffre décimal, et l'on a démontré que ce rapport était incommensurable; d'où il faut conclure que lorsque le rayon ou le diamètre sont exprimés par un nombre fini, entier ou fractionnaire, la circonférence ne peut être exprimée qu'approximativement.

565. Maintenant que nous connaissons le rapport numérique de la circonférence au diamètre, voyons com-

ment la mesure du diamètre ou du rayon nous dispensera de mesurer la circonférence.

Représentons le rayon du cercle par R, le diamètre sera 2R, et si nous exprimons la circonférence par C, nous aurons, en faisant usage du rapport calculé par Archimède (564),

$$7 : 22 :: 2R : C ;$$

d'où l'on tire $C = \frac{2R \times 22}{7} = 2R \times \frac{22}{7}$.

Si nous employons le rapport de Métius, nous aurons :

$$113 : 355 :: 2R : C ;$$

d'où $C = \frac{2R \times 355}{113} = 2R \times \frac{355}{113}$.

Enfin, si nous prenons le rapport 3,1415926..... etc., nous aurons, en conservant les quatre premiers chiffres décimaux : $1 : 3,1416 :: 2R : C$;

d'où $C = 2R \times 3,1416$.

Ainsi, l'on voit que dans tous les cas on aura la mesure de la circonférence en multipliant le diamètre par le rapport numérique de ces deux lignes.

566. Le rapport décimal employé en dernier lieu, est beaucoup plus exact que le nombre $\frac{22}{7}$ obtenu par Archimède ; il est presque aussi exact que le rapport de Métius, et de plus il a l'avantage d'être exprimé en décimales, ce qui évite la division. En prenant un plus grand nombre de chiffres décimaux on aura autant d'exactitude que l'on voudra.

Dans beaucoup d'applications on peut se contenter des deux premiers chiffres décimaux ; et, dans ce cas, on obtiendra la circonférence en multipliant 2R par 3,14.

D'autres fois, mais rarement, il sera utile d'employer un plus grand nombre de chiffres. Au surplus, pour ne

pas être obligé d'écrire à chaque instant le nombre 3,1415926... *tous les géomètres* sont convenus que, dans le langage mathématique, on exprimerait ce rapport par la lettre π, que l'on a réservée uniquement pour cet usage, et qui, par conséquent, ne sera jamais employée pour représenter une autre valeur.

Ainsi, toutes les fois que dans une formule on verra la lettre π, il faut se rappeler qu'elle exprime *le rapport numérique de la circonférence au diamètre.*

567. Si nous reprenons actuellement la proportion énoncée au numéro 418, nous aurons

$$1 : \pi :: 2R : C;$$

d'où

$$C = 2\,\pi R.$$

Ainsi la formule $2\,\pi R$ ou $2R \times \pi$ est l'expression de la circonférence du cercle *en fonction du rayon*, elle nous apprend que, pour calculer la longueur d'une circonférence de cercle, il faut *doubler le rayon et multiplier le résultat par* π.

Le nombre de chiffres décimaux qui devront être employés dans ce calcul dépendra, dans chaque cas, de la nature de la question proposée.

Pour calculer la circonférence d'un cercle dont le rayon serait 24 mètres, on aura en faisant $\pi = 3,14$

$$C = 2 \times 24 \times 3,14 = 150^{m},72\,;$$

tandis que si l'on fait $\pi = 3.1416$, on aura

$$C = 2 \times 24 \times 3,1416 = 150^{m},7968.$$

La deuxième valeur est plus exacte que la première.

568. Pour apprécier l'erreur, il faudrait multiplier 2R par la différence qui existe entre la valeur de π et le nombre par lequel on a remplacé ce facteur. Or, quoique nous ne connaissions pas la valeur exact de π, nous savons qu'elle est plus petite que 3,1416 : ainsi, quand on suppose $\pi = 3,1416$, on obtient un résultat un peu trop fort, mais $3,1416 - 3,1415926 = 0,0000074$, et la vérita-

ble valeur de π étant $>$ que 3,1415926, il s'ensuit que l'erreur sur la circonférence entière sera $< 0{,}0000074 \times 2R$. Ainsi, pour un cercle dont le rayon serait 18 mètres, l'erreur en plus serait moindre que $0{,}0000074 \times 36$ ou 0,0002684. Si l'on faisait $\pi = 3{,}14$, on aurait un résultat un peu trop faible, mais la différence entre la véritable valeur de π et 3,14 est plus petite que $3{,}1416 - 3{,}14 = 0{,}0016$; donc l'erreur que l'on fera en employant 3,14, sera plus petite que $0{,}0016 \times 2R$. Ainsi, pour un cercle de 18 mètres de rayon, l'erreur en *moins* sur la circonférence serait plus petite que $0{,}0016 \times 36 = 0{,}0576$, ou à peu près 6 centimètres.

569. **Cor.** I. Maintenant que nous savons obtenir la mesure de la circonférence, il nous sera facile de calculer la *mesure absolue* des arcs de cercles (495). En effet, la valeur relative d'un arc exprimant son rapport avec la circonférence, si l'on exprime par a le nombre de degrés de l'arc BC, *fig.* 9, on aura :

$$360 : a :: 2\pi R : BC$$

d'où

$$BC = \frac{2\pi R\, a}{360} = \frac{\pi R a}{180}.$$

En supposant BC = 48 *degrés*, R = 12 *mètres*, et $\pi = 3{,}14$ on aurait

$$arc\ BC = \frac{\pi \times 12 \times 48}{180} = \frac{16\pi}{5} = 10^{m}{,}04.$$

570. **Cor.** II. Si, dans l'équation précédente nous mettons l'unité en évidence, il vient

$$arc\ BC = 10{,}04 \times 1 \text{ mètre}.$$

Divisant les deux termes par 1 mètre, on a

$$\frac{arc\ B}{1\ mètre} = 10{,}04.$$

Le nombre 10,04 sera donc le rapport numérique entre l'arc BC et le *mètre*.

Ainsi, on obtient la valeur absolue d'un arc en cherchant son rapport avec l'unité de longueur, tandis que la valeur relative exprime le rapport avec la circonférence (495).

571. **cor.** III. Pour obtenir le rapport numérique de deux arcs appartenant à des cercles différents, on calculera les valeurs absolues de chacun deux, et l'on divisera l'un des résultats obtenus par l'autre ; ainsi, par exemple, supposons, *fig.* 8, que BC soit un arc de 100 degrés, dans un cercle dont le rayon = 12 *mètres* et que B'C' soit un arc de 36 degrés dans un cercle dont le rayon = 28 *mètres*, on aura, pour les valeurs absolues

$$arc\,BC = \frac{\pi \times 12 \times 100}{360} = \frac{10\pi}{3}.$$

$$arc\,B'C' = \frac{\pi \times 28 \times 36}{360} = \frac{14\pi}{5}.$$

Divisant la première équation par la seconde et réduisant, il reste :

$$\frac{arc\,BC}{arc\,B'C'} = \frac{10\pi}{3} : \frac{14\pi}{5} = \frac{10\pi \times 5}{3 \times 14\pi} = \frac{50}{42} = \frac{25}{21};$$

d'où résulte la proportion

$$arc\,BC : arc\,B'C' :: 25 : 21.$$

CHAPITRE III.

Surfaces des figures.

I.

572. **Définitions.** Deux figures planes peuvent être *égales, semblables* ou *équivalentes.*

Nous avons vu dans le premier livre que deux figures sont *égales* lorsqu'en plaçant l'une sur l'autre on peut les faire coïncider dans toutes leurs parties.

Dans le second livre nous avons dit que des figures sont *semblables* lorsqu'elles ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

Nous nommerons actuellement figures *équivalentes* celles qui ont même étendue en surface.

573. La *surface* ou l'*aire* d'une figure plane est la portion de plan qu'elle occupe; l'étendue de cette quantité dépend de certaines lignes dont nous allons donner les définitions.

574. La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé que l'on nomme la *base*.

On peut toujours prendre pour base le côté que l'on veut, quelle que soit la position du triangle dans l'espace.

575. La *hauteur* d'un parallélogramme ou d'un rectangle est la perpendiculaire qui mesure la distance de deux côtés opposés considérés comme *bases*.

576. Dans le trapèze (101), on prend toujours pour *bases* les deux côtés parallèles, et la *hauteur* est la perpendiculaire qui mesure la distance de ces deux côtés.

II.

577. **Théorème**. *Deux rectangles qui ont les bases et les hauteurs égales sont égaux.*

Démonstration. *Fig.* 1, Pl. 15. Supposons que l'on ait transporté le rectangle ABCD sur A'B'C'D' en plaçant la base AB sur son égale A'B'. Les deux côtés AD, BC, perpendiculaires sur AB, coïncideront avec A'D' et B'C', perpendiculaires sur A'B', et l'égalité des deux figures sera évidente.

III.

578. **Théorème**. *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Démonstration. *Fig.* 2. Admettons, pour fixer les idées que l'on ait la proportion

AB : *ab* :: 7 : 4

Ce qui revient à supposer qu'il existe une commune mesure AO, *ao*, comprise *sept* fois dans AB, et *quatre* fois dans *ab*. Si l'on conçoit une perpendiculaire par chacun des points de division des droites AB, *ab*, on aura une suite de rectangles *égaux entre eux* (577) puisqu'ils auront même base et même hauteur.

Or, si l'on prend l'un quelconque de ces petits rectangles pour *terme de comparaison*, et que l'on exprime sa surface par la lettre *m*, on aura

$$\textit{rectangle}\ \mathrm{ABCD} = 7m,$$
$$\textit{rectangle}\ abcd = 4m.$$

Divisant la première équation par la seconde, on a

$$\frac{\textit{rectangle}\ \mathrm{ABCD}}{\textit{rectangle}\ abcd} = \frac{7m}{4m} = \frac{7}{4}.$$

Et par conséquent

rect. ABCD : *rect. abcd* :: 7 : 4.

Comparant cette proportion avec celle que l'on avait admise dans l'énoncé, on obtient, à cause du rapport commun, *rect.* ABCD : *rect. abcd* :: AB : *ab*.

La lettre *m* ayant disparu, on doit en conclure que le principe est indépendant de la grandeur de ce facteur, et qu'il serait encore vrai dans le cas où la commune mesure serait infiniment petite (362, 506).

579. **corollaire**. On peut prendre pour bases d'un rectangle les deux côtés que l'on veut, pourvu qu'ils soient opposés l'un à l'autre; d'où il résulte que si nous

considérons les droites AD, *ad*, comme les bases des deux rectangles proposés, les côtés AB et *ab* seront les hauteurs, et l'on pourra conclure de la démonstration précédente que

580. *Deux rectangles de même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.*

IV.

581. **Surface du rectangle**. Soit ABCD, *fig.* 3, le rectangle dont on veut calculer la surface, et supposons que le rectangle *abcd* soit l'unité, la mesure directe consisterait à *superposer* l'unité sur la quantité autant de fois qu'elle pourrait y être contenue; mais si le rectangle ABCD est inaccessible, si l'espace représenté par cette figure contient des arbres, des maisons, etc., il est évident que la mesure par *superposition* ne peut plus avoir lieu; voyons donc s'il n'y aurait pas quelque autre moyen d'arriver au même but. On doit se rappeler que la question consiste à trouver le **rapport numérique** qui existe entre la quantité ABCD et l'unité *abcd* (485).

Pour atteindre ce but, concevons le rectangle auxiliaire *ab*C'D', ayant la même base *ab* que l'unité, et la même hauteur *b*C' que la figure ABCD dont on veut obtenir la mesure.

Les deux rectangles ABCD, *ab*C'D', ayant même hauteur BC = *b*C', ils sont entre eux comme leurs bases (578), ce qui donnera la proportion

rect. ABCD : *rect. ab*C'D' :: AB : *ab*.

Mais les deux rectangles *ab*C'D', *abcd*, ayant la même base *ab*, ils sont entre eux comme leurs hauteurs (580), et l'on aura *rect. ab*C'D' : *rect. abcd* :: BC : *bc*.

Multipliant ces deux proportions termes par termes, et remarquant que le rectangle auxiliaire disparaît comme

facteur commun aux deux termes du premier rapport, on obtient

$$\text{rect. ABCD} : \text{rect. } abcd :: \text{AB} \times \text{BC} : ab \times bc,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\text{rect. ABCD}}{\text{rect. } abcd} = \frac{\text{AB} \times \text{BC}}{ab \times bc} = \frac{\text{AB}}{ab} \times \frac{\text{BC}}{bc}.$$

582. Cette proportion nous donne les moyens de calculer la surface demandée; en effet, supposons, pour fixer les idées, que AB contienne *ab cinq* fois, et que BC contienne *bc sept* fois, on aura

$$\frac{\text{AB}}{ab} = 5\,;\ \frac{\text{BC}}{bc} = 7\,;$$

d'où l'on conclura

$$\frac{\text{rect. ABCD}}{\text{rect. } abcd} = \frac{\text{AB}}{ab} \times \frac{\text{BC}}{bc} = 5 \times 7 = 35\,;$$

par conséquent

$$\text{rect. ABCD} = 35 \text{ fois le rect. } abcd.$$

583. En général, *pour obtenir le* **rapport numérique** *des surfaces de deux rectangles, il faut multiplier le* **rapport numérique** *des bases par le* **rapport numérique** *des hauteurs.*

584. Dans la pratique, on doit toujours employer les moyens les plus simples ; c'est pourquoi, au lieu d'un rectangle quelconque, on est convenu de prendre pour unité un quarré dont chaque côté serait égal à l'*unité de longueur*.

Il résulte de cette convention que $ab = 1$; $bc = 1$.

Ce qui donne

$$\frac{\text{rect. ABCD}}{\text{rect. } abcd} = \frac{\text{AB}}{1} \times \frac{\text{BC}}{1}.$$

Et si l'on sous-entend le diviseur 1, on aura

$$\frac{rect.\ ABCD}{rect.\ abcd} = AB \times BC.$$

Ainsi, le produit AB × BC indiquera *combien de fois* l'unité quarrée *abcd* est contenue dans le grand rectangle ABCD ; c'est pourquoi on dit ordinairement que :

585. *Pour obtenir la surface d'un rectangle, il faut* **multiplier sa base par sa hauteur.**

586. Cette locution étant consacrée par l'usage, nous devons nous en servir ; mais il faut bien se rappeler qu'il ne s'agit pas ici de multiplier une ligne par une autre, ce qui n'aurait aucun sens. On doit toujours supposer que ces deux lignes, mesurées, directement ou indirectement, sont remplacées par deux *nombres ;* et le produit que l'on obtient en multipliant l'un de ces nombres par l'autre, exprime *combien de fois* le rectangle donné contient l'unité de surface.

* 587. L'unité de longueur employée en France étant le *mètre*, il s'ensuit que l'unité de surface *abcd* sera un quarré d'un mètre de côté : c'est ce que l'on appelle 1 *mètre quarré*, que l'on désigne par *mq*.

Alors, on aura

$$\frac{AB}{1\ mètre} = 5\ ;\ \frac{BC}{1\ mètre} = 7,$$

et la proportion précédente deviendra

$$\frac{rect.\ ABCD}{1\ mètre\ quarré} = 5 \times 7 = 35\ ;$$

d'où $rect.\ ABCD = 35\ mètres\ quarrés = 35^{mq}$.

Les lignes de points tracées sur le rectangle ABCD, mettent en évidence l'exactitude du résultat obtenu. Je ferai remarquer cependant, que ces lignes ne sont pas nécessaires à l'opération, et que l'on est parvenu à *calculer l'expression de la surface* du rectangle donné en ne

mesurant que la base et la hauteur. C'est précisément là le but que l'on s'était proposé.

588. **Corrollaire.** Si les droites AB, BC, ne contenaient pas un nombre exact de mètres, cela ne changerait rien a la manière d'opérer. Ainsi, par exemple, supposons $AB = 5^{m},34$ et $BC = 7^{m},42$, on multipliera 5,34 par 7,42, ce qui donnera 39,6228 ; et l'on en conclura que le rectangle ABCD vaut $39^{mq},6228$ = 39 *mètres quarrés* 6228 *dix milliémes* de mètre quarré.

589. **Cor.** II. *Fig.* 4. *Surface du quarré.* Si la base d'un rectangle est égale à sa hauteur, la figure sera évidemment un quarré ; par conséquent, on obtiendra la surface en multipliant par lui-même le nombre qui exprime la longueur du côté. Dans ce cas on écrirait

$$surface\ ABCD = \overline{AB}^2.$$

Si AB = 10 *mètres*, on aura

surf. ABCD = 10 × 10 = 100 *mètres quarrés.*

V.

590. **Subdivisions du mètre quarré.** Remarquons d'abord, *fig.* 4, que si le côté d'un quarré est partagé en dix parties égales, la surface contient 100 fois le quarré qui aurait une de ces parties pour côté. Ainsi, par exemple, si AB = 1 mètre, A*o* sera 1 décimètre, et l'on aura,

1 *mètre quarré* = 100 *décimètres quarrés.*

On reconnaîtra pareillement que

1 *décimètre quarré* = 100 *centimètres quarrés ;*

et que

1 *centimètre quarré* = 100 *millimètres quarrés.*

Donc

1 *mètre quarré* = 100 *décimètres quarrés* = 10000 *centimètres quarrés* = 1000000 *millimètres quarrés.*

Par conséquent

$0^{mq},01 = \frac{1}{100}$ de mètre quarré = 1 *décimètre quarré.*

$0^{mq},0001 = \frac{1}{10000}$ de mètre quarré = 1 *centimètre quarré.*

$0^{mq},000001 = \frac{1}{1000000}$ de mètre quarré = 1 *millimètre quarré.*

Ainsi le nombre

$39^{mq},6228 = 39$ mètres quarrés, $\frac{62}{100}$ de mètre quarré, $\frac{28}{10000}$ de mètre quarré = 39 *mètres quarrés*, 62 *décimètres quarrés*, 28 *centimètres quarrés.*

On aurait de même

$7^{mq},438273 = 7$ *mètres quarrés*, 43 *décimètres quarrés* 82 *centimètres quarrés*, 73 *millimètres quarrés.*

591. Si l'on avait $3^{mq},453$, on placerait un zéro à droite afin d'avoir un nombre pair de chiffres décimaux, et l'on dirait alors

$3^{mq},453 = 3^{mq},4530 = 3$ *mètres quarrés*, 45 *décimètres quarrés*, 30 *centimètres quarrés.*

Si l'on avait $0^{mq},1$ on écrirait

$0^{mq},1 = 0^{mq},10 = 10$ *décimètres quarrés.*

592. Le mot *déci* exprimant la dixième partie de l'unité, il semble au premier abord que l'on aurait pu écrire

$0^{mq},1 = 1$ *déci—mètre quarré.*

$0^{mq},01 = 1$ *décimètre—quarré.*

La première de ces deux quantités est dix fois aussi grande que la seconde ; mais ce rapport, que l'on a rendu sensible en plaçant convenablement le trait d'union, ne

pourrait pas être exprimé dans le discours; c'est pourquoi on est convenu de dire

$0^{mq},1 = 0,^{mq},10 = 10$ *décimètres quarrés*.

Par les mêmes raisons, on aura :

$0^{mq},001 = 0^{mq},0010 = 10$ *centimètres quarrés*.

Si l'on ne voulait pas mettre de zéros à droite des nombres 0,1 , 0,001 , on pourrait dire

$0^{mq},1 = 1$ *dixième* de mètre quarré.

$0^{mq},001 = 1$ *millième* de mètre quarré.

Mais ces expressions ne sont pas en usage.

593. Souvent, dans les calculs composés, pour éviter les virgules, on exprime toutes les dimensions en fonction de la plus petite unité décimale, et l'on replace ensuite la virgule quand le calcul est entièrement terminé.

Ainsi, par exemple, si l'on voulait calculer la surface d'un rectangle dont la base serait $3^{m},41$ et la hauteur $2^{m},732$; on multiplierait 3410 par 2732, et l'on aurait 9316120; d'où l'on conclurait que la surface donnée vaut 9316120 *millimètres quarrés* = 9 *mètres quarrés*, 31 *décimètres quarrés*, 61 *centimètres quarrés*, 20 *millimètres quarrés*.

Le calcul précédent revient à prendre le *millimètre* pour unité de longueur, et par conséquent le *millimètre quarré* pour unité de surface.

VI.

594. **Théorème**. *Fig.* 5. *Deux parallélogrammes*, ABCD, A'B'C'D', *qui ont des bases égales, et des hauteurs égales, sont équivalents.*

Démonstration. Transportons le parallélogramme A'B'C'D' en ABC"D", de manière que A'B' coïncide avec AB; les deux bases CD, C"D", seront sur une même droite parallèle à AB.

On aura CA = DB, comme côtés opposés d'un parallélogramme ; AC″ = BD″ par la même raison : de plus, les deux angles CAC″, DBD″, sont égaux, comme ayant leurs côtés parallèles ; par conséquent, le triangle

$$CAC'' = DBB'';$$

de plus on a évidemment

$$ABCD + DBD'' = CAC'' + ABC''D'';$$

on avait par construction

$$ABC''D'' = A'B'C'D';$$

ajoutant les trois équations et réduisant, il vient

$$ABCD = A'B'C'D'.$$

595. **Corrollaire**. La démonstration qui précède ne dépend pas de la grandeur des angles formés par les côtés des parallélogrammes ; d'où l'on doit conclure que le principe serait également vrai si l'une des deux figures était un rectangle. Par conséquent,

Un parallélogramme quelconque est toujours équivalent au rectangle qui aurait même base et même hauteur que lui.

VII.

596. **Surface du parallélogramme**. Concevons, *fig.* 6, le rectangle A'B'C'D', ayant la même base et la même hauteur que le parallélogramme ABCD ; on aura, par le corollaire précédent,

$$surf.\ ABCD = surf.\ A'B'C'D';$$

mais on avait, par le théorème du numéro 585,

$$surf.\ A'B'C'D' = A'B' \times A'D'.$$

De plus on a par l'énoncé

$$A'B' = AB$$
$$A'D' = CP.$$

Multipliant les quatre équations entre elles et réduisant, on obtient

$$surf.\ ABCD = AB \times CP\ ;$$

d'où l'on doit conclure que *pour obtenir la surface d'un parallélogramme il faut* **multiplier sa base par sa hauteur** (586).

597. Les facteurs dépendants du rectangle auxiliaire A'B'C'D' ayant disparu dans les réductions, il est évident que cette figure n'est ici que pour faciliter la démonstration du principe, et qu'il est inutile de la tracer dans l'application. Ainsi on se contenterait de mesurer la base AB, et la hauteur CP ; puis on multiplierait l'un par l'autre les *nombres* qui exprimeraient combien de fois chacune de ces lignes contient l'unité de longueur.

Supposons, par exemple, que AB = 79 mètres, et que CP = 56, on aura 79 × 56 = 4424 ; d'où il résulte que la surface du parallélogramme ABCD vaut 4424 *mètres quarrés.*

VIII.

598. **Théorème**. *Un triangle quelconque vaut toujours la moitié du rectangle qui aurait même base et même hauteur que lui.*

Démonstration. *Fig.* 7. Soit le triangle ABC ; concevons AD parallèle à BC, et CD parallèle à BA ; le quadriterre ABCD sera un parallélogramme. De plus, les deux triangles ABC, ACD seront égaux ; donc, le triangle

$$ABC = \frac{ABCD}{2}.$$

Mais le parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle A'BCD' (595), donc

$$\frac{ABCD}{2} = \frac{A'BCD'}{2}\ ;$$

ajoutant les deux équations et réduisant on aura

$$ABC = \frac{A'BCD'}{2}.$$

Par conséquent, *un triangle quelconque vaut toujours la moitié du rectangle qui a même base et même hauteur que lui.*

599. **Corrollaire.** *Deux triangles,* ABC, A″BC, *de même base et de même hauteur,* sont équivalents, puisque chacun d'eux vaut la moitié du rectangle A′BCD′.

Par conséquent toutes les fois que plusieurs triangles ABC, A″BC, A‴BC, etc., auront une base commune, et que leurs sommets seront sur une même droite AA‴ parallèle à la base BC, ils seront équivalents, puisque chacun d'eux sera la moitié du rectangle A′BCD′.

IX.

600. **Surface du triangle.** *Fig.* 7. Nous venons de démontrer que

$$\textit{triangle}\ ABC = \frac{A'BCD'}{2};$$

nous savons par le théorème 585 que

$$A'BCD' = BC \times A'B.$$

De plus on a évidemment

$$A'B = AP.$$

Multipliant et réduisant, on aura

$$\textit{triang.}\ ABC = \frac{BC \times AP}{2}.$$

Donc, *pour obtenir la surface d'un triangle, il faut multiplier sa base par sa hauteur, et diviser le produit par deux.*

Ainsi, par exemple, si l'on avait BC = 24 mètres, AP = 59, on obtiendrait

$$surf.\ \mathrm{ABC} = \frac{24 \times 59}{2} = 12 \times 59 = 708 \text{ mètres quarrés.}$$

Si la base d'un triangle était égale à $2^{m},47$, et que la hauteur fût $1^{m},213$, la surface vaudrait

$$2,47 \times 1,213 = 2,99611 = 2^{mq},996110$$

= 2 *mètres quarrés*, 99 *décimètres quarrés*, 61 *centimètres quarrés*, 10 *millimètres quarrés*.

601. **Corollaire.** Toutes les fois que le triangle est rectangle, il faut prendre pour sa base l'un des côtés de l'angle droit. Le second côté de l'angle droit est alors la hauteur; et, dans ce cas, *la surface est égale à la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit*.

X.

602. **Surface du trapèze.** *Fig.* 8. Si nous concevons la diagonale AD, le trapèze sera décomposé en deux triangles ABD, ACD; mais par le théorème (601) on a

$$surf.\ \mathrm{ABD} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{DP}}{2}$$

$$surf.\ \mathrm{ACD} = \frac{\mathrm{CD} \times \mathrm{DP}}{2}.$$

Ajoutant, on aura

$$surf.\ (\mathrm{ABD} + \mathrm{ACD}) = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{DP} + \mathrm{CD} \times \mathrm{DP}}{2};$$

d'où, en écrivant DP comme facteur commun,

$$surf.\ \text{trapèze ABCD} = \frac{\mathrm{DP}(\mathrm{AB} + \mathrm{CD})}{2}.$$

Ainsi, *pour obtenir la surface du trapèze, il faut multiplier la hauteur par la somme des bases parallèles, et diviser le produit par deux.*

603. **Corrollaire** I. *Fig.* 9. Si par le point K, milieu de

la hauteur DP, nous traçons la droite MS, parallèle aux bases du trapèze, les deux côtés de l'angle PDB seront coupés en parties proportionnelles, et puisque l'on a $DK = KP$, on aura $DS = SB$.

Concevons actuellement les deux droites CO, MI parallèles au côté DB, nous aurons

$$CO = DS; \quad (147)$$

mais $$DS = SB$$

$$SB = MI. \quad (147)$$

Ajoutant et réduisant, on aura

$$CO = MI.$$

De plus, l'angle MCO = AMI, comme *internes-externes;* l'angle COM = MIA par la même raison ; par conséquent les deux triangles CMO, MAI sont égaux (145), et l'on a $CM = MA$.

Ainsi, *la parallèle à égale distance des deux bases d'un trapèze passe par les milieux des côtés non parallèles.*

604. **Cor.** II. Les deux triangles CMO, MAI, étant égaux, on a

$$MO = AI;$$

mais $$AI + IB = AB,$$

de plus $$MS = IB \quad (147)$$

$$MS = MO + OS;$$

enfin $$OS = CD. \quad (147)$$

Ajoutant et réduisant, on obtient

$$2MS = AB + CD,$$

d'où $$MS = \frac{AB + CD}{2};$$

donc, *la parallèle à égale distance des deux bases d'un trapèze vaut la moitié de la somme de ces deux bases.*

605. **Cor.** III. Nous avons trouvé (602) pour la surface du trapèze,

$$surf. \, ABCD = \frac{DP(AB + CD)}{2};$$

mais le corollaire précédent nous donne

$$\frac{AB+CD}{2} = MS.$$

Multipliant cette équation par la précédente, et réduisant, nous aurons

$$surf.\ ABCD = DP \times MS.$$

Ainsi, *on peut obtenir la surface du trapèze en multipliant la hauteur par la parallèle à égale distance des deux bases.*

XI.

606. **Surface d'un polygone quelconque**. Soit, par exemple, le polygone ABCDEH, *fig.* 10, on le décomposera en triangles, en traçant les diagonales AC, AD, AE.

La diagonale AC sera la base du triangle ABC, qui, par conséquent, aura pour hauteur la perpendiculaire BP.

La diagonale AD pourra servir de base commune aux deux triangles ADC, ADE; la hauteur du premier sera CQ, et la hauteur du second sera EK.

Enfin la diagonale AE sera la base du dernier triangle AEH, qui aura pour hauteur la droite HS.

On déterminera par une mesure directe, ou par le calcul, les longueurs des bases et des hauteurs des quatre triangles qui composent le polygone donné. Supposons que l'on ait trouvé

bases	*hauteurs*
AC = 700^{m}	BP = 150^{m}
AD = 800	CQ = 200
AE = 600	EK = 260
	HS = 120

On aura pour les surfaces

$$\textit{triangle}\ \mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BP}}{2} = \frac{700\times150}{2} = 52500^{\mathrm{mq}}$$

$$\textit{triangle}\ \mathrm{ACD} = \frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{CQ}}{2} = \frac{800\times200}{2} = 80000$$

$$\textit{triangle}\ \mathrm{ADE} = \frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{EK}}{2} = \frac{800\times260}{2} = 104000$$

$$\textit{triangle}\ \mathrm{AEH} = \frac{\mathrm{AE}\times\mathrm{HS}}{2} = \frac{600\times120}{2} = 36000$$

Ajoutant, on obtiendra 272500

Ainsi *polygone* ABCDEH = 272500 *mètres quarrés*.

607. Si le polygone dont nous venons de calculer la surface était une pièce de terre, un parc, une forêt, etc., il faudrait exprimer sa surface en fonction de l'*are*, qui est l'unité agraire. Or, nous avons vu dans l'arithmétique qu'*un are vaut* 100 *mètres quarrés*. Par conséquent on aurait

272500 *mètres quarrés* = 2725 *ares* = 27 *hectares* 25 *ares*.

608. Corollaire. Souvent, au lieu de décomposer le polygone donné en triangles, on préfère le partager en trapèzes. Ainsi, *fig*. 11, on tracera la droite AB, sur laquelle on abaissera une perpendiculaire par chacun des sommets du polygone. On calculera ensuite les surfaces de tous les trapèzes et triangles résultant de cette construction, et la somme des nombres obtenus, exprimera combien il y a d'unités quarrées dans la surface du polygone.

609. On peut encore employer le même moyen pour calculer la surface d'un espace terminé par une ligne courbe, *fig*. 12. Dans ce cas, on abaisse les perpendiculaires par tous les points où il y a un changement brusque de courbure dans la direction de la ligne qui forme le con-

tour de la figure. Il est bien entendu aussi, que les points par lesquels on abaisse les perpendiculaires doivent être assez rapprochés pour qu'il soit permis de considérer comme droites les petites parties de courbes qui les séparent.

610. Dans quelques cas particuliers, *fig.* 13, il sera possible de décomposer le polygone donné en rectangles.

Enfin, il est évident que les différentes méthodes que nous venons d'indiquer, pourront être employées dans la même opération.

XII.

611. **Surface du polygone régulier**. *Fig.* 14. Si l'on joint le centre avec tous les sommets, le polygone sera décomposé en triangles isocèles égaux entre eux. Il suffira donc de calculer la surface d'un de ces triangles, et de multiplier le résultat par le nombre qui exprime combien il y a de côtés dans le polygone. Ainsi on aura :

$$\textit{surf.}\ \text{AOB} = \frac{\text{AB} \times \text{OC}}{2},$$

et si l'on désigne par la lettre n le nombre des côtés du polygone, on aura

$$\textit{surf. pol.} = \frac{n \times \text{AB} \times \text{OC}}{2};$$

mais le produit $n \times \text{AB}$, représente évidemment le *périmètre* ou contour du polygone, et la droite OC est *l'apothème*, ou rayon du cercle inscrit; d'où il résulte que,

Pour obtenir la surface d'un polygone régulier, il faut multiplier le périmètre par l'apothème, et diviser le résultat par deux.

612. **Corrollaire**. *Fig.* 15. *Secteur de polygone régulier.* Si plusieurs triangles isocèles, égaux entre eux, sont placés à côté les uns des autres, on aura un secteur de polygone régulier, *fig.* 15. Si nous désignons par h

l'apothème, et par b la base de l'un des triangles, sa surface sera $\frac{bh}{2}$, mais en exprimant par n le nombre de ces triangles, égaux entre eux, nous aurons évidemment

$$surf.\ OACB = \frac{nbh}{2} = \frac{h \times nb}{2}.$$

Or nb sera la somme des bases des triangles donnés, et l'on conclura de ce qui précède, que

Pour obtenir la surface d'un secteur de polygone régulier, il faut multiplier l'apothème par la ligne polygonale régulière formée par les bases consécutives des triangles isocèles, et diviser le résultat par deux.

XIII.

613. **Surface du cercle**. Si l'on augmente le nombre des côtés d'un polygone régulier, l'apothème augmente, et cette ligne devient égale au rayon lorsque le nombre des côtés du polygone est *infini*. Dans ce cas le périmètre du polygone est une circonférence de cercle.

Par conséquent (611)

On obtiendra la surface d'un cercle en multipliant la circonférence par le rayon, et en divisant le produit par deux.

614. Si nous exprimons la surface du cercle par S, et la circonférence par C, nous aurons.

$$S = \frac{CR}{2};$$

mais nous avons trouvé au numéro 567

$$C = 2\pi R;$$

multipliant et réduisant, nous aurons

$$S = \pi R^2.$$

Ainsi la formule πR^2, exprime la surface du cercle en *fonction du rayon ;* elle nous apprend que pour obtenir la surface d'un cercle, il faut

Calculer le quarré du rayon, et multiplier le résultat par π.

615. Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir la surface d'un cercle dont le rayon serait 12 mètres ; on ferait dans la formule précédente $R=12$, et l'on aurait alors

$$S = \pi \times 144 = 3.14 \times 144 = 452^{mq},16$$
$$= 452 \text{ mètres quarrés, } 16 \text{ décimètres quarrés.}$$

Le nombre 3,14 étant plus petit que le nombre π, le résultat obtenu est un peu trop faible.

616. Pour apprécier l'erreur, il faudrait multiplier R^2 par la différence qui existe entre 3,14 et la *valeur exacte* de π ; or, quoique nous ne connaissions pas cette valeur exacte, nous savons qu'elle est $> 3,1415926$ etc.

Par conséquent on aura

$$3,1415916 \text{ etc.} - 3,14 > 0,0015926 \text{ et } < 0,0016 ;$$

d'où il résulte que l'erreur commise dans l'évaluation de la surface du cercle sera $< 0,0016\,R^2$.

Dans l'exemple précédent on aura

$$0,0016\,R^2 = 0,0016 \times 144 = 0,2304 ;$$

par conséquent l'erreur sera $< 0,2304$ et par conséquent $< 0,24$.

Ainsi le nombre $452^{mq},16$ exprime à moins de 24 *décimètres quarrés,* la surface d'un cercle dont le rayon = 12 *mètres*.

617. Si dans le calcul précédent on avait fait $\pi = 3,1416$ on aurait eu

$$S = \pi \times 144 = 144 \times 3,1416 = 452^{mq},3904.$$

Le nombre 3,1416 étant plus grand que le nombre π ; le résultat obtenu est un peu trop fort ; mais on a

$$3,1416 - 3,1415926 \text{ etc.} < 0,0000074.$$

Donc, l'erreur que l'on commettra en supposant $\pi = 3,1416$ sera plus petite que $0,0000074.R^2$.

Or, lorsque $R = 12$ on a

$$0,0000074R^2 = 0,0000074 \times 144 = 0,0010656\,;$$

mais 0,0010656 est plus petit que 0,0011. Donc le nombre $452^{mq},3904$ exprime a moins de 11 *centimètres quarrés* la surface du cercle qui a 12 *mètres* de rayon.

On obtiendra autant d'exactitude que l'on voudra en prenant pour π un plus grand nombre de chiffres décimaux.

618. **Corrollaire** I. *Surface du secteur de cercle.* Si le nombre des triangles isocèles qui composent le secteur de polygone régulier OACB, *fig.* 15, était *infini*, la somme des bases de tous ces triangles deviendrait un arc de cercle, et l'apothème serait égal au rayon. Par conséquent

Pour obtenir la surface d'un secteur de cercle OACB, fig. 16, *il faut multiplier le rayon par la valeur absolue de l'arc qui forme la base du secteur, et diviser le résultat par deux.*

Si nous exprimons par a le nombre de degrés, et par b la valeur absolue de l'arc ACB, nous aurons (569)

$$360 : a :: 2\pi R : b.$$

D'où
$$b = \frac{2\pi Ra}{360} = \frac{\pi Ra}{180}.$$

Mais en appliquant le principe que nous venons d'énoncer, on obtient

$$secteur\ OACB = \frac{bR}{2}\,;$$

multipliant cette équation par la précédente, et réduisant, on a

$$secteur\ OACB = \frac{\pi R^2 a}{360}\,;$$

c'est-à-dire que l'on calculera la surface entière du cercle πR^2, on multipliera le résultat par a, qui exprime le nombre de degrés de l'arc, et l'on divisera le tout par 360.

Ainsi, par exemple, si l'on avait $a = 72$ *degrés*; $R = 15$ mètres, on obtiendrait pour la surface du secteur

$$S = \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 72}{360} = 45\pi = 45 \times 3.14 = 141^{mq},30.$$

619. **Cor.** II. *Surface du segment de cercle.* Le segment ABCD est évidemment la différence entre le secteur de cercle OACB, et le triangle isocèle OAB.

Par conséquent, *pour obtenir la surface du segment, on calculera le triangle et le secteur, puis on retranchera le premier nombre du second.*

Pour effectuer les calculs indiqués, il faudra connaître 1° le rayon du cercle; 2° le nombre de degrés de l'arc ACB; 3° la corde AB; 4° la perpendiculaire OD.

Ces quantités pourront être mesurées sur la figure, mais quelquefois cette mesure directe est impossible. Nous verrons plus tard comment, dans un cercle dont le rayon est donné, on peut calculer la corde et la perpendiculaire, lorsque l'on connaît le nombre de degrés de l'arc, et réciproquement comment on pourrait calculer la longueur de l'arc si l'on connaissait la corde ou la perpendiculaire.

Rapport des surfaces.

XIV.

620. **Théorème.** *Les surfaces de deux parallélogrammes quelconques sont entre elles comme les produits des bases de ces parallélogrammes par leurs hauteurs.*

14

Démonstration. Si nous exprimons par B la base et par H la hauteur d'un parallélogramme P, nous aurons

$$\textit{surf.}\ P = BH.$$

Exprimons actuellement par B' la base et par H' la hauteur d'un parallélogramme P'. Nous aurons

$$\textit{surf.}\ P' = B'H'.$$

Divisant la première équation par la seconde, il viendra

$$\frac{\textit{surf.}\ P}{\textit{surf.}\ P'} = \frac{BH}{B'H'}.$$

621. **Corollaire** I. Si les deux parallélogrammes dont il s'agit ont même hauteur, on aura

$$H' = H,$$

et l'équation précédente deviendra

$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{B'H} = \frac{B}{B'}.$$

Ainsi, *deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

622. **Cor**. II. Si, au contraire, les deux parallélogrammes donnés ont même base, on aura

$$B' = B.$$

D'où
$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{BH'} = \frac{H}{H'}.$$

C'est-à-dire *que deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

XV.

623 **Théorème**. *Les surfaces de deux triangles sont entre elles comme les produits des bases de ces triangles par leurs hauteurs.*

Démonstration. Si nous exprimons par B la base, et par H la hauteur d'un triangle T, nous aurons

$$surf.\ T = \frac{BH}{2}.$$

Exprimons actuellement par B′ la base et par H′ la hauteur d'un second triangle T′, nous aurons

$$surf.\ T' = \frac{B'H'}{2}.$$

Divisant la première équation par la seconde et réduisant,

on aura $$\frac{surf.\ T}{surf.\ T'} = \frac{BH}{2} : \frac{B'H'}{2} = \frac{BH}{B'H'}.$$

624. **Corollaire** I. Si les hauteurs sont égales on aura

$$H' = H,$$

et l'équation précédente deviendra

$$\frac{surf.\ T}{surf.\ T'} = \frac{BH}{B'H} = \frac{B}{B'}.$$

Ainsi, *deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

625. **Cor.** II. Si, au contraire, les bases sont égales, on aura $$B' = B,$$

d'où $$\frac{surf.\ T}{surf.\ T'} = \frac{BH}{BH'} = \frac{H}{H'}.$$

C'est-à-dire que *deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

XVI.

626. **Théorème**. *Lorsque deux triangles ont un angle égal, leurs surfaces sont entre elles comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle égal.*

Démonstration. *Fig.* 17. Concevons les droites CH,

C'H', perpendiculaires sur les bases AB, A'B'. Les deux triangles ABC, A'B'C' sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs (623), ce qui donne

$$\frac{\textit{triangle}\ \mathrm{ABC}}{\textit{triangle}\ \mathrm{A'B'C'}}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}}{\mathrm{A'B'}\times\mathrm{C'H'}}.$$

Les deux triangles rectangles ACH, A'C'H', ayant un angle égal A, sont semblables, et l'on a par conséquent

$$\mathrm{CH} : \mathrm{C'H'} :: \mathrm{AC} : \mathrm{A'C'};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{C'H'}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A'C'}}.$$

Multipliant cette équation par la précédente et réduisant, on aura

$$\frac{\textit{trian.}\ \mathrm{ABC}}{\textit{trian.}\ \mathrm{A'B'C'}}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{\mathrm{A'B'}\times\mathrm{A'C'}}.$$

627. **Corollaire.** Si les deux rectangles AB × AC, A'B' × A'C', étaient équivalents, les triangles ABC, A'B'C', le seraient également.

XVII.

628. **Théorème.** *Les surfaces de deux triangles semblables sont entre elles comme les quarrés de deux côtés ou de deux lignes homologues quelconques.*

Démonstration. *Fig.* 18. Les deux triangles ABC, *abc*, étant semblables on a

$$\mathrm{AB} : ab :: \mathrm{AC} : ac.$$

Les deux triangles rectangles ACH, *ach*, ayant un angle égal A, sont semblables, ce qui donne

$$\mathrm{CH} : ch :: \mathrm{AC} : ac.$$

Multipliant l'une des proportions par l'autre, on aura

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{CH} : ab\times ch :: \overline{\mathrm{AC}}^2 : \overline{ac}^2,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}}{ab\times ch}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{ac}^2}.$$

Mais on a (623)

$$\frac{triangle\ ABC}{triangle\ A'B'C'} = \frac{AB \times CH}{ab \times ch}.$$

Multipliant et réduisant, on aura

$$\frac{triangle\ ABC}{triangle\ A'B'C'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{ac}^2}.$$

XVIII.

629. Théorème. *Les surfaces des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés de deux côtés ou de deux lignes homologues quelconques.*

Démonstration. *Fig.* 7, Pl. 10. Les deux polygones EHKBCD, *ehkbcd*, étant semblables, leurs côtés, et en général leurs lignes homologues, sont proportionnels (413). Ainsi on a

$$EH : eh :: ED : ed :: DC : dc :: \ldots :: MN : mn.$$

Élevant tout au carré, on obtient

$$\overline{EH}^2 : \overline{eh}^2 :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2 :: \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 \ldots \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2.$$

Mais si nous exprimons par T, T′, T″, etc., les triangles EHK, EKD, DKC, etc., suivant lesquels on a décomposé le polygone EHKBCD, et par t, t', t'', t''', etc., les triangles *ehk*, *ekd*, *dkc*, etc., qui composent le polygone *ehkbcd*, on aura

$$T : t :: \overline{EH}^2 : \overline{eh}^2 :: \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2.$$

$$T' : t' :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2 :: \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2.$$

$$T'' : t'' :: \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 :: \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2.$$

D'où, à cause du rapport commun,

$$T : t :: T' : t' :: T'' : t'' \ldots :: \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2.$$

Et composant

$$(T + T' + T''. \ . \ .) : (t + t' + t''. \ . \ .) :: \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2,$$

c'est-à-dire

$$pol.\ EHKBCD : pol.\ ehkbcd :: \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2 :: \overline{EH}^2 : \overline{eh}^2.$$

630. **Corollaire** I. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, étant des figures semblables, leurs surfaces seront entre elles comme les *quarrés* des rayons des cercles inscrits ou circonscrits.

631. **Cor.** II. Les cercles étant des figures semblables, leurs surfaces sont comme les quarrés des côtés des polygones semblables inscrits ou circonscrits.

632. **Cor.** III. Si nous exprimons par S et s les surfaces de deux cercles dont les rayons seraient R et r, nous aurons

$$S = \pi R^2.$$
$$s = \pi r^2.$$

Divisant la première équation par la seconde, on a

$$(1) \qquad \frac{S}{s} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Ainsi *les surfaces des cercles sont comme les quarrés de leurs rayons.*

633. **Cor.** IV. Si nous exprimons par D et d les diamètres de ces deux cercles, nous aurons $D = 2R$, $d = 2r$, d'où

$$2R^2 = D^2.$$
$$2r^2 = d^2.$$

Divisant et réduisant

$$(2) \qquad \frac{R^2}{r^2} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Multipliant l'équation (1) par l'équation (2), on aura

$$\frac{S}{s} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Donc *les surfaces des cercles sont comme les quarrés de leurs diamètres.*

XIX.

634. **Remarque**. Lorsque l'on connaît le rapport qui existe entre les côtés de deux figures semblables, et que l'on a calculé la surface de l'une de ces deux figures, on peut facilement en déduire la surface de la seconde.

Supposons, par exemple, *fig.* 5, Pl. 10, que les côtés AB : *ab*, soient entre eux comme 11 : 6, et que la surface du polygone *abcdeh*, soit égale à $72^{mq},58$, on posera la proportion

$$\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 :: pol.\ abcde : pol.\ ABCDEH,$$

qui devient

$$36 : 121 :: 72^{mq},58 : pol.\ ABCDEH.$$

D'où

$$pol.\ ABCDEH = \frac{121 \times 72^{mq},58}{36} = 243^{mq},95.$$

XX.

635. **Théorème**. *Fig.* 11, Pl. 10. *Le quarré de la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre, est égal au rectangle qui aurait pour côtés les deux parties de ce diamètre.*

Démonstration. Nous avons vu au numéro 424 que

$$BD : AD :: AD : DC.$$

Mais on sait que dans toute proportion, *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens*; par conséquent on aura

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC.$$

636. **Corollaire**. *Fig.* 9. *Le quarré de la perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle sur*

l'hypoténuse est égal au rectangle qui aurait pour côtés les deux segments de l'hypoténuse.

XXI.

637. **Théorème.** *Le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.*

Démonstration. *Fig.* 9, Pl. 10. On a vu (426 et 427) que

$$BD : AB :: AB : BC.$$
$$DC : AC :: AC : BC.$$

La première proportion donne

(1) $$\overline{AB}^2 = BD \times BC.$$

La seconde donne également

(2) $$\overline{AC}^2 = DC \times BC.$$

Ajoutant et réduisant

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (BD + DC)\,BC = BC \times BC = \overline{BC}^2.$$

Ainsi l'on a $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$,

Cette proposition et la théorie des figures semblables, sont les plus importantes de la géométrie.

638. **Corollaire** I. Si l'on retranche l'équation (2) de l'équation (1), on a

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = (BD - DC)\,BC =$$
$$= (BD - DC)\,(BD + DC) = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2;$$

Ainsi *la différence des quarrés des deux côtés de l'angle droit est égale à la différence des quarrés des deux segments de l'hypoténuse.*

639. **Cor.** II. Si l'on divise l'équation (1) par (2),

on obtient $$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD \times BC}{DC \times BC} = \frac{BD}{DC}.$$

Par conséquent *les quarrés faits sur les deux côtés de l'angle droit, sont entre eux comme les segments adja-de l'hypoténuse.*

640. **Cor.** III. Si dans l'équation (1) on divise les deux membres par $\overline{BC}^2$, on aura

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{BD\times BC}{\overline{BC}^2}=\frac{BD}{BC}.$$

Donc *le quarré d'un des deux côtés de l'angle droit est au quarré de l'hypoténuse, comme le segment adjacent au côté que l'on considère, est à l'hypoténuse.*

641. **2e démonstration**. Le théorème qui précède peut être démontré directement et sans le secours des triangles semblables.

En effet, construisons, *fig.* 19, Pl. 15, les quarrés des trois côtés AB, AC, BC, et traçons la perpendiculaire AD, que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre avec le côté UK.

Il résulte de cette construction, que le quarré de l'hypoténuse sera décomposé en deux rectangles BDGK et DCGU.

Or, si nous parvenons à démontrer que le rectangle BDGK est égal au quarré ABHM, et que le rectangle DCGU est égal au quarré ACSN, il sera évident que la somme des deux rectangles ou le quarré de BC est égal à la somme des quarrés des deux côtés AB et AC.

Comparons d'abord les triangles HBC, ABK, nous reconnaîtrons que l'angle HBC se compose de l'angle droit HBA, plus l'angle aigu ABC; mais l'angle ABK est composé du même angle aigu ABC, plus l'angle droit CBK; donc, l'angle HBC = ABK. De plus, HB = AB comme côtés d'un même quarré, BC = BK, par la même raison; donc, les deux triangles HBC, ABK, sont égaux, puis-

qu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux (143).

Mais le triangle ABK vaut la moitié du rectangle BDGK, parce qu'ils ont même base BK, et même hauteur BD.

Les deux angles BAM, BAC, étant droits, les côtés AM, AC, sont en ligne droite, et le triangle HBC vaut la moitié du quarré HBAM, puisqu'ils ont même base HB, et même hauteur AB.

Nous avons démontré que les deux triangles ABK, HBC, étaient égaux; donc le rectangle BDGK, double du triangle ABK, est égal au quarré ABHM, qui vaut le double du triangle HBC.

On démontrera de même que le rectangle DCGU est égal au quarré ACSN; donc, la somme des deux rectangles est égale à celle des deux quarrés.

Mais la somme des deux rectangles BDGK, DCGU, n'est autre chose que le quarré de l'hypoténuse BC. Par conséquent, on aura

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

On peut écrire la démonstration tout entière de la manière suivante :

$$\overline{BC}^2 = BDGK + DCGU.$$

$BDGK = 2.ABK.$ (598)

$2.ABK = 2.HBC.$ (143)

$2.HBC = \overline{AB}^2.$ (598)

$DCGU = 2.ACU.$ (598)

$2.ACU = 2.BCS.$ (143)

$2.BCS = \overline{AC}^2.$ (598)

Ajoutant et réduisant, on aura

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

CHAPITRE IV.

Tranformation des figures.

I.

642. **Problème.** *Fig.* 1, Pl. 16. *Transformer un triangle* ABC, *en un autre triangle de même surface, et qui aurait la même base.*

Solution. Il est évident qu'il suffira de transporter le sommet partout où l'on voudra sur la droite CC^{v}, parallèle à AB ; tous les triangles ABC, ABC', ABC'', seront équivalents, puisqu'ils auront même base et même hauteur.

643. Si l'on veut que le nouveau triangle soit isocèle, on prendra pour sommet le point C'', situé sur la perpendiculaire PC'', élevée au milieu de la base AB.

644. Si l'on veut que le nouveau triangle soit rectangle en A, on prendra pour sommet le point C', situé sur la droite AC', perpendiculaire au côté AB.

645. Si l'angle du point B était donné, et qu'il dût, par exemple, être égal à ABC^{v}, le sommet C^{v} serait déterminé par l'intersection du côté BC^{v}, avec la droite CC^{v}, parallèle à AB.

646. Si, au contraire, on donnait l'angle opposé au côté AB, si l'on voulait que cet angle fût droit, on prendrait pour sommet l'un des deux points C''', suivant lesquels la droite CC^{v} rencontre la demi-circonférence qui a pour diamètre AB.

La solution, dans ce dernier cas, ne serait pas possible,

si la hauteur du triangle donné était plus grande que AP, moitié de AB.

647. Enfin, si l'on voulait que l'angle opposé au côté AB, fût égal à un angle AHB, on décrirait l'arc AHB, de manière que le segment AHBP fût capable de l'angle donné, puis on prendrait pour sommet l'un des deux points, suivant lesquels la droite CC' rencontre l'arc AHB.

Cette solution ne serait pas possible, si la hauteur du triangle donné était plus grande que la perpendiculaire PH.

648. **Cor.** Au lieu de faire mouvoir le sommet, on pourrait déplacer la base ; ainsi, par exemple, *fig.* 2, pour remplacer le triangle donné ABC, par un triangle rectangle équivalent, on ferait B'C' = BC; et si l'on portait la moitié de BC à droite et à gauche de B', on aurait le triangle isocèle AB''C'' équivalent au triangle donné ABC.

II.

649. **Problème.** *Fig.* 5. *Transformer un triangle* ABC *en un autre triangle qui aurait pour sommet un point donné.*

Solution. Soit donné le point D, pour sommet du nouveau triangle, on joindra CD ; on tracera ensuite la droite AA' parallèle à DC ; puis on remplacera le triangle DCA par le triangle DCA', qui lui est équivalent (599).

650. **Corollaire** I. Supposons actuellement, *fig.* 6, que le nouveau sommet D, soit situé dans l'intérieur du triangle donné. On joindra le point D avec B par la droite BD, que l'on prolongera. On tracera AA' parallèle à BC, de sorte que l'on pourra remplacer le triangle BCA par BCA'.

On tracera ensuite DC, puis A'A'', parallèle à DC, ce qui déterminera le point A'', et l'on remplacera le trian-

gle DCA′ par son égal DCA″. Ainsi, en résumant, on aura

$$BCA = BCA'.$$
$$BCA' = BCD + DCA'.$$
$$DCA' = DCA''.$$
$$BCD + DCA'' = BDA''.$$

Ajoutant et réduisant, on a

$$BCA = BDA''.$$

651. **Cor.** II. Tout ce que nous venons de dire s'applique également au cas où le point D serait situé en dehors du triangle donné, *fig.* 7.

652. **Cor.** III. Les opérations seraient encore les mêmes, si la hauteur du nouveau triangle BDA″, *fig.* 8, devait être plus grande que la hauteur du triangle donné BAC. Mais alors on aurait

$$BCA = BCA'.$$
$$BCA' = BA'A'' + A'A''C.$$
$$A'A''C = A'A''D.$$
$$A'A''D + BA'A'' = BA''D.$$

Ajoutant et réduisant, on aura

$$BCA = BA''D.$$

III.

653. **Problème.** *Fig.* 4. *Remplacer le triangle* ABC *par un autre triangle* A′DC″, *de même surface, qui aurait pour sommet le point* D, *et dont la base* A′C″ *serait située sur une ligne donnée* XY.

Solution. On tracera BB′ parallèle à AC, puis on joindra B′ avec les points A et C.

On tracera AA′ parallèle à CB′, et l'on joindra A′ avec C.

On construira A′D, puis on tracera CC′ parallèle à B′A′, et l'on joindra B′ avec les points C′ et D.

Enfin, on tracera C'C'' parallèle à DB', et l'on joindra C'' avec D, ce qui donnera le triangle $A'DC'' = ABC$. En effet, il résulte évidemment des constructions précédentes, que

$$ACB = ACB'.$$
$$ACB' = A'CB'.$$
$$A'CB' = A'C'B'.$$
$$A'C'B' = A'C'C'' + C'C''B'.$$
$$C'C''B' = C'C''D.$$
$$A'C'C'' + C'C''D = A'DC''.$$

Ajoutant et réduisant, on a

$$ACB = A'DC''.$$

654. **2e solution**. *Fig*. 3. On tracera les droites AP, DH, perpendiculaires sur BC et sur XY ; puis, en opérant comme nous l'avons dit aux numéros 442, 443, on construira le quatrième terme de la proportion,

$$DH : AP :: BC : A'C''.$$

En effet, on aura

$$A'C'' \times DH = BC \times AP.$$

D'où
$$\frac{A'C'' \times DH}{2} = \frac{BC \times AP}{2}.$$

Par conséquent,

triangle $DA'C''$ = *triangle* ABC.

IV.

655. **Problème**. *Fig*. 5. *Transformer le triangle donné* ABC, *en un triangle* A'DB *de même surface, en conservant l'angle* B.

Solution. Les deux triangles ABC, A'DB, ayant un angle égal, il suffira, pour qu'ils aient la même étendue en surface, que l'on ait la relation (627)

$$AB \times BC = DB \times BA',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$DB : AB :: BC : BA'.$$

On pourra donc choisir à volonté l'un des deux côtés DB ou BA', et chercher ensuite le quatrième terme de la proportion.

V.

656. **Problème**. *Fig.* 8. *Transformer le triangle donné* ABC, *en un triangle isocèle équivalent* AB'B'.

Solution. Par le théorème 627, on aura la relation

$$AB \times AC = AB' \times AB'.$$

D'où $$AB : AB' :: AB' : AC.$$

Par conséquent, le côté cherché AB' devra être une moyenne proportionnelle entre les deux côtés AB et AC. De là résulte la construction suivante (445) :

1° On décrira la demi-circonférence ADB ; 2° on rabattra AC en AC', et l'on tracera la perpendiculaire C'D ; 3° on décrira l'arc de cercle DB'B', et le triangle isocèle AB'B' sera équivalent au triangle ABC.

VI.

657. **Problème**. *Fig.* 9. *Transformer un triangle quelconque* ACB, *en un triangle équilatéral de même surface.*

Solution. On fera l'angle X'AB égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit (292); on tracera la droite CC' parallèle à BA, puis on joindra le point C' avec B; on transformera le triangle AC'B en un triangle isocèle AB'B' (656); alors on aura

$$ABC = ABC'. \qquad (599)$$
$$ABC' = AB'B'. \qquad (656)$$

Ajoutant et réduisant,

$$ABC = AB'B'.$$

Mais l'angle B'AB' valant $\frac{2}{3}$ d'angle droit, et les deux angles B', B', étant égaux, il s'en suit que le triangle AB'B' est équiangle, et par conséquent équilatéral.

VII.

658. **Problème**. *Fig.* 10. *Transformer un polygone* ABCDH *en un triangle equivalent.*

Solution. Si l'on veut que le point A soit le sommet du triangle demandé, on tracera la diagonale AC, et la droite BB', parallèle à AC; on joindra B', avec le point A; et l'on pourra remplacer le triangle ACB par son équivalent ACB'.

On tracera ensuite la diagonale AD, et la droite HH' parallèle à AD, on joindra H' avec le point A, et l'on remplacera le triangle ADH par son équivalent ADH'.

Alors on aura

$$pol.\ ABCDH = ADH + ADC + ACB.$$
$$ADH = ADH'.$$
$$ACB = ACB'.$$
$$ADH' + ADC + ACB' = triang.\ AH'B'.$$

Ajoutant et réduisant,

$$pol.\ ABCDH = triang.\ AH'B'.$$

659. **Corollaire** I. On aurait pu prendre pour base un autre côté du polygone donné; mais, dans ces sortes de tranformation, il faut tâcher que la forme du triangle cherché se rapproche autant que possible de celle du triangle équilatéral, afin d'éviter les angles trop aigus.

660. **Cor**. II. Si l'on voulait que le sommet fût situé en un point donné, on transformerait d'abord le polygone en un triangle quelconque, et l'on remplacerait le triangle ob-

tenu par un autre, qui aurait le point donné pour sommet (649, 652).

VIII.

661. **Problème**. *Fig.* 11. *Transformer un rectangle donné* ABCD, *en un second rectangle qui aurait pour base une droite donnée* AS.

Solution. On joindra le point S avec C, puis on tracera la droite BI parallèle à SC. Le rectangle AIKS sera équivalent au rectangle ABCD ; en effet, par le parrallélisme des deux droites SC, BI, on a

$$AS : AC :: AB : AI;$$

d'où $$AS \times AI = AC \times AB.$$

IX.

662. **Problème**. *Fig.* 12. *Transformer un rectangle* ABCH *en un quarré de même surface.*

Solution. On rabattra la hauteur AC en AC′, on décrira la demi-circonférence ADB, puis on tracera la droite C′D perpendiculaire sur AB ; la corde AD sera le côté du quarré demandé.

En effet, on a (426)

$$AB : AD :: AD : AC';$$

d'où $$\overline{AD}^2 = AB \times AC' = AB \times AC = rect.\ ABHC.$$

663. **Corollaire**. *Fig.* 13. S'il s'agissait de transformer le parallélogramme ABKH, en un quarré équivalent, on tracerait la hauteur AC, et l'on agirait pour le reste comme dans l'exemple précédent.

Ainsi, dans l'un et l'autre cas, le tout se réduit à *chercher une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du rectangle ou du parallélogramme donné.*

X.

664. **Problème**. *Transformer un triangle en un quarré de même surface.*

Solution. *Fig.* 14. On fera AC′ égal à PO, moitié de la hauteur du triangle donné; on décrira la demi-circonférence ADB, puis on tracera C′D perpendiculaire sur AB. La corde AD sera le côté du quarré demandé. En effet, on aura

$$\overline{AD}^2 = AB \times AC' = AB \times PO = \frac{AB \times HP}{2} = \textit{triang.}\, ABH.$$

665. **2ᵉ Solution**. *Fig.* 15. On tracera la droite AC′, égale à la hauteur AC du triangle donné. On fera AO moitié de la base AB; on décrira la demi-circonférence ADC′, et la droite OD, perpendiculaire sur AC′, déterminera le point D. La corde AD sera le côté du quarré demandé, car on aura évidemment

$$\overline{AD}^2 = AC' \times AO = AC \times AO = \frac{AC \times AB}{2} = \textit{triang.}\, ABH.$$

Ainsi, la première solution revient à *chercher une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur;* et la seconde solution consiste à *construire une moyenne proportionnelle entre la hauteur et la moitié de la base.*

XI.

666. **Problème.** *Fig.* **16.** *Transformer le trapèze* ABHK *en un quarré équivalent.*

Solution. Par le point O milieu de HB, on tracera la droite OS, parallèle au côté AK; ce qui donnera AS égale à la *demi-somme* des bases parallèles. On rabattra la hau-

teur AC, en AC′ ; on élèvera la perpendiculaire C′D, et la corde AD sera le côté du quarré demandé.

En effet, on aura

$$\overline{AD}^2 = AC' \times AS,$$
$$AC' = AC,$$
$$AS = \frac{AB + KH}{2}.$$

Multipliant et réduisant, on aura

$$\overline{AD}^2 = \frac{AC\,(AB + KH)}{2} = trap.\ ABHK. \qquad (602)$$

XII.

667. **Problème**. *Tranformer un polygone en un quarré équivalent.*

Solution. On transformera d'abord le polygone en un triangle (658), puis ce triangle en un quarré équivalent (664, 665).

668. **Corollaire**. Si le polygone est régulier, on cherchera une moyenne proportionnelle entre l'apothème et la moitié du périmètre (611).

XIII.

669. **Problème**. *Transformer un triangle quelconque en un polygone régulier équivalent.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 17. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de transformer le triangle CAB en un polygone régulier de *sept* côtés, on pourra opérer de la manière suivante.

On partagera la base AB en sept parties égales (434), de sorte que le triangle CAD vaudra la septième partie du triangle total ABC.

Avec un bon rapporteur, on fera l'angle ACO $= \grave{a}\ \frac{4}{7}$ d'angle droit, ou $51° - 25' - 43''$.

On tracera la droite DD' parallèle à CA, et l'on remplacera le triangle CAD par son égal CAD'.

On remplacera ensuite le triangle CAD', par le triangle isocèle CA'D'', en opérant comme nous l'avons fait au numéro (656).

Il ne restera plus alors qu'à terminer le polygone régulier A'D''MN.... En effet,

$$\textit{polyg.}\ A'D''MN.... = 7.CA'D'',$$
$$CA'D'' = CAD',$$
$$CAD' = CAD,$$
$$7.CAD = \textit{triang.}\ CAB.$$

Multipliant et réduisant, on aura

$$\textit{polyg.}\ A'D''MN.... = \textit{triang.}\ CAB.$$

670. **Corollaire I.** Si l'angle, au centre du polygone demandé, est un de ceux que l'on peut obtenir par l'une des constructions indiquées aux numéros 291, 295, 450 ou 452, on pourra résoudre la question sans employer le rapporteur.

671. **Cor. II.** Pour construire un polygone régulier équivalent à un polygone quelconque, on transformera d'abord le polygone donné en triangle (658), puis le triangle en polygone régulier (669).

XIV.

672. **Problème.** *Transformer un polygone régulier quelconque en un polygone régulier équivalent, et d'un nombre de côtés double.*

Solution. *Fig.* 2. Soit AB le côté d'un pentagone régulier, on veut déterminer le côté du décagone régulier de même surface. Si l'on abaisse le rayon CI perpendiculaire

sur AB, le triangle ACI sera la dixième partie du pentagone donné ; d'après cela, si nous décrivons la demi-circonférence OSC, la corde CS sera le rayon du cercle circonscrit au décagone demandé. En effet, exprimons par P le pentagone donné, et par D le décagone régulier qui aurait pour côté HK, nous aurons

$$D = 10.CHK,$$
$$CHK = ACI, \qquad (656)$$
$$10.ACI = P.$$

Ajoutant et réduisant, on a

$$D = P.$$

Ainsi le décagone qui a pour côté HK, est égal au pentagone qui a pour côté AB.

673. **Corollaire** I. La même construction pourra servir à transformer le décagone en polygone de 20 côtés, le polygone de 20 côtés en polygone de 40, et ainsi de suite; d'où il faudrait conclure que l'on peut s'approcher autant que l'on veut du cercle équivalent à un polygone donné.

Cette conséquence, exacte en théorie, ne l'est plus en application, parce qu'en doublant toujours ainsi, les côtés deviennent trop petits, et les intersections trop aiguës. Il vaudra mieux, dans ce cas, employer le calcul.

Si cependant on voulait transformer avec le compas un polygone quelconque en cercle, on pourrait opérer de la manière suivante.

XV.

674. **Problème**. *Construire un cercle équivalent à un polygone donné.*

Solution. On transformera d'abord le polygone donné en un quarré, et la question sera réduite à trouver le rayon

du cercle équivalent à cette dernière figure. Supposons, par exemple, *fig.* 3, que le quarré ABCD soit équivalent à un polygone donné P, on fera AH égale à 314 parties d'une échelle quelconque, et l'on portera 100 de ces parties de A en K. On joindra le point H avec K, et l'on tracera la droite DS parallèle à HK.

On décrira la demi-circonférence AOB, on tracera SO perpendiculaire sur AB, et la corde AO sera le rayon du cercle demandé. En effet, on a

$$AD : AS :: AH : AK :: 314 : 100 :: \pi : 1.$$

Donc $AD : AS :: \pi : 1;$

d'où $\pi AS = AD;$

mais $AD = AB;$

de plus $\overline{AO}^2 = AB \times AS,$ (426)

multipliant les trois équations et réduisant, on a

$$\pi \overline{AO}^2 = \overline{AB}^2.$$

Ainsi (614) le cercle qui a pour rayon AO sera équivalent au quarré qui a pour côté AB, et par conséquent au polygone P.

XVI.

675. **Problème**. *Fig.* 4. *Tranformer un cercle en un quarré équivalent.*

Solution. Cela revient à construire la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence. Voici la manière de faire l'opération.

Au moyen d'une échelle bien divisée, on fera AK = 100 parties, puis AH = 314. On joindra le point K avec H; et l'on tracera la droite OS parallèle à KH.

On décrira ensuite la demi-circonférence ABS, on tra-

cera O'B perpendiculaire sur AS, et la corde AB sera le côté du quarré cherché. En effet, on a

$$AS : AO :: AH : AK :: 314 : 100 :: \pi : 1.$$

Donc $AS : AO :: \pi : 1;$

d'où $AS = \pi AO;$

mais $\overline{AB}^2 = AO' \times AS,$

de plus $AO' = AO,$

multipliant les trois équations et réduisant, on a

$$\overline{AB}^2 = \pi \overline{AO}^2.$$

676. **Corollaire.** La droite AS étant égale à πAO, on aura $2AS = 2\pi AO = 2\pi R =$ *circonférence* AO.

XVII.

677. **Problème.** *Diviser la surface d'un polygone donné.*

Solution. On transformera le polygone donné en un triangle équivalent, dont on divisera la base.

Supposons, par exemple, *fig.* 5, que l'on veut diviser la surface du pentagone ABCDH en quatre parties égales ; on remplacera le triangle ACB, par son égal ACB', et le triangle ADH par ADH' et l'on aura le triangle AB'H' équivalent au pentagone ABCDH (658).

On divisera la base B'H', en quatre parties égales, et l'on aura quatre triangles équivalents AKB', ASK, ASV, AVH'.

Chacun de ces triangles vaudra le quart du polygone donné.

Il ne restera plus qu'à transformer ces triangles de manière à les faire rentrer dans la figure donnée. Ainsi, par

exemple, si l'on trace KK' parallèle à AC, on pourra remplacer le triangle ACK par ACK', et l'on aura

$$ABK' = ABC - ACK' = AB'C - ACK = AB'K = \frac{AB'H'}{4}.$$

On aura également

$$ASCK' = ASC + ACK' = ASC + ACK = ASK = \frac{AB'H'}{4}.$$

On obtiendra le troisième quart en traçant VV' parallèle à AD, ce qui donnera

$$ASDV' = ASD + ADV' = ASD + ADV = ASV = \frac{AB'H'}{4}.$$

Enfin, le triangle AV'H sera évidemment le dernier quart.

Ainsi, le pentagone ABCDH sera partagé en quatre parties équivalentes par les trois droites AK', AS, AV'.

678. **Corollaire**. *Fig.* 6. Si l'on voulait que les sécantes aboutissent en un point P, situé sur l'un des côtés du polygone donné, on commencerait par tranformer ce polygone en un triangle qui aurait le point P pour sommet; et l'on agirait ensuite comme dans l'exemple précédent.

Les opérations à faire dans ce cas, sont suffisamment indiqués sur la figure, qui représente un pentagone partagé en trois parties équivalentes par deux droites PK', PS.

XVIII.

679. **Problème**. *Fig.* 7. *Construire un quarré* P *équivalent à la somme de deux quarrés donnés* M, N.

Solution. On fera un angle XAY, et l'on prendra les distances AB, AC égales aux côtés des deux quarrés donnés M et N.

L'hypoténuse BC sera le côté du quarré cherché. Car le triangle ABC étant rectangle, on aura (637)

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

ou

$$P = M + N.$$

680. **Corrollaire.** *Fig.* 8. Si l'on veut construire un quarré équivalent à la somme de plusieurs quarrés M, N, O, P, on pourra opérer de la manière suivante :

On tracera la droite AB, égale au côté du quarré M.

On élèvera au point B la perpendiculaire BC, égale au côté du quarré N.

On tracera l'hypoténuse AC, sur laquelle on élèvera la perpendiculaire CD, égale au côté du quarré O.

On tracera l'hypoténuse AD, sur laquelle on élèvera la perpendiculaire DE, égale au côté du quarré P. Et ainsi de suite.

La dernière hypoténuse, AE, sera le côté d'un quarré équivalent à la somme des quarrés donnés; en effet, on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$
$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2,$$
$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2.$$

Ajoutant et réduisant on a

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2,$$

et par conséquent

$$X = M + N + O + P.$$

XIX.

681. **Problème.** *Fig.* 9. *Construire un quarré équivalent à la différence de deux quarrés donnés* $\overline{BC}^2$, $\overline{AB}^2$.

Solution. On tracera un angle droit XAY, et l'on portera AB sur l'un des côtés de cet angle ; on ouvrira ensuite le compas d'une quantité égale au côté BC ; et du point B, comme centre, on décrira l'arc *mn*. Cette construction déterminera AC, dont le quarré sera égal à la différence des deux quarrés donnés. En effet on a (637)

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2,$$

d'où $$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2,$$

682. **2° Solution**. On peut commencer la construction, *fig.* 10, en traçant d'abord la droite BC, sur laquelle on décrira la demi-circonférence BAC ; ensuite, du point B, comme centre, avec le rayon BA, on décrira l'arc *vu*, qui déterminera le point A, et l'on aura comme précédemment

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2. \qquad (193)$$

683. **Corollaire**. Si l'on veut combiner par addition ou soustraction un grand nombre de quarrés donnés, on construira le côté d'un quarré équivalent à la somme de tous les quarrés que l'on veut ajouter (680) ; on cherchera également le côté d'un quarré équivalent à la somme des quarrés que l'on veut retrancher, et l'on prendra la différence des deux quarrés obtenus, en opérant comme nous venons de le faire.

XX.

684. **Problème**. *Multiplier ou diviser un quarré.*

Solution. Supposons que l'on veuille construire un quarréé quivalent à 5 fois un autre quarré donné M.

On pourra obtenir le résultat, *fig.* 11, par une construction semblable à celle du n° 680, *fig.* 8 ; mais il sera plus simple d'opérer de la manière suivante, *fig.* 12.

Soit BD le côté du quarré donné, on fera

$$BC = 5BD,$$

on décrira la demi-circonférence BAC, on élèvera la perpendiculaire DA, et l'on aura

$$\overline{BA}^2 = BC \times BD = 5BD \times BD = 5\overline{BD}^2.$$

685. **Corrolaire**. *Fig.* 12. Si l'on veut obtenir la cinquième partie d'un quarré donné, on divisera le côté BC de ce quarré en cinq parties égales, on décrira la demi-circonférence BAC, on élèvera la perpendiculaire DA par le premier point de division, et la corde BA sera le côté du quarré demandé. En effet, on a

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD = BC \times \frac{BC}{5} = \frac{\overline{BC}^2}{5}.$$

XXI.

686. **Problème**. *Fig.* 13. *Construire un quarré qui soit à un autre quarré donné, comme la ligne* m *est à la ligne* n.

Solution. Sur une droite quelconque, on portera BD $= m$ et DC $= n$, et l'on décrira la demi-circonférence BAC.

On tracera les deux cordes AB, AC; on fera AH égal au côté du quarré donné; puis on tracera HK parallèle à CB; on obtiendra AK pour le côté du quarré demandé.

En effet, on a (639)

$$\overline{AK}^2 : \overline{AH}^2 :: KS : SH$$

mais $$KS : SH :: BD : DC :: m : n;$$

donc, par suite du rapport commun,

$$\overline{AK}^2 : \overline{AH}^2 :: m : n.$$

687. **Corollaire**. Si le rapport était donné en nombres; si, par exemple, on devait avoir $\overline{AK}^2 : \overline{AH}^2 :: 5 : 3$, on ferait $BD = 5$ parties quelconques, $DC = 3$, et le reste comme précédemment.

XXII.

688. **Problème**. *Construire un polygone qui soit dans un rapport déterminé avec un ou plusieurs polygones donnés.*

On pourra transformer ces polygones en quarrés, et la question ne présentera plus de difficultés (679. 681, 684, 685); mais quand les polygones seront semblables, il ne sera pas nécessaire de les transformer. Ainsi, par exemple :

689. *Étant donnés deux polygones semblables* B, C, *fig.* 14, *on veut construire un troisième polygone* A, *semblable aux premiers, et qui soit égal à leur somme.*

Solution. Soit *b, c, a* les côtés homologues des polygones B, C, A, on aura (629)

$$B : b^2 :: C . c^2 :: A : a^2;$$

d'où, en composant,

$$(B + C) : A :: (b^2 + c^2) : a^2,$$

et par conséquent

$$a^2 (B + C) = A (b^2 + c^2);$$

mais on doit avoir par l'énoncé

$$A = B + C;$$

multipliant et réduisant, on aura

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ainsi la question se réduit à trouver une droite a dont le quarré serait égal à la somme des deux quarrés b^2 et c^2 (679).

Quand on aura trouvé a, il ne restera plus qu'à construire sur cette droite, le polygone A, semblable à B ou à C (459).

690. **Corollaire**. Si l'on donnait les deux polygones A, C, et qu'il fallût construire un polygone semblable B, égal à leur différence, on déduirait de la première proposition $B : (A - C) :: b^2 : (a^2 - c^2)$;

d'où $b^2 (A - C) = B (a^2 - c^2)$,

mais on doit avoir

$$B = A - C;$$

multipliant et réduisant, on aurait

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Ainsi, on obtiendrait b en construisant le côté d'un quarré équivalent à la différence de deux quarrés donnés a^2 et c^2 (681).

691. **Cor. II**. *Fig.* 14. Si l'on voulait construire un polygone A semblable à un autre polygone donné B, et qui soit à ce dernier comme $m : n$, on aurait (629)

$$A : B :: a^2 : b^2 :: m : n,$$

d'où $a^2 : b^2 :: m : n$.

Ainsi la question se réduirait à trouver le côté a d'un quarré a^2 qui soit à un autre quarré b^2, comme $m : n$ (686). Après quoi on construirait sur a un polygone semblable au polygone B (459).

XXII.

692. **Problème**. *Fig.* 15. *Construire un polygone équivalent au polygone* A *et semblable au polygone* B.

Solution. Exprimons par b l'un des côtés du polygone B, et par x le côté homologue du polygone demandé, que nous désignerons par X, on aura par suite de la similitude qui doit exister entre les polygones X et B

$$B : X :: b^2 : x^2;$$

mais puisque le polygone X doit être équivalent au polygone A, on pourra remplacer X par A, ce qui donnera

$$B : A :: b^2 : x^2.$$

Supposons actuellement que l'on ait transformé les deux polygones A et B en quarrés équivalents, et désignons par m^2 le quarré équivalent à A, et par n^2 le quarré équivalent à B, nous aurons

$$B : A :: n^2 : m^2;$$

mais par suite du rapport commun aux deux dernières proportions, on aura

$$n^2 : m^2 :: b^2 : x^2;$$

et prenant la racine de chaque terme,

$$n : m :: b : x,$$

donc x est une quatrième proportionnelle aux trois droites n, m, b.

Ainsi, en résumant, voici l'ordre des opérations :

1° On transformera le polygone B en un quarré équivalent, dont on désignera le côté par n (667);

2° On transformera le polygone A en un quarré équilent, dont on désignera le côté par m (667);

3° On construira la quatrième proportionnelle aux trois droites n, m, b, ce qui donnera x (442);

4° On construira sur x une figure semblable au polygone B (459).

693. **Corollaire**. Si les polygones B et X devaient être réguliers, il vaudrait mieux chercher le rayon du cercle circonscrit au polygone X, et pour cela il suffirait de remplacer dans les formules précédentes, b par r, et x par R.



LIVRE QUATRIÈME.

DE L'USAGE QUE L'ON PEUT FAIRE DE L'ALGÈBRE POUR L'EXPRESSION DES RELATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Théorèmes.

I.

694. **Définitions.** Les signes algébriques sont principalement utiles pour exprimer les relations qui existent entre les dimensions de l'étendue.

En effet, si l'on a deux droites AB, CD, on pourra exprimer

Leur somme par $AB + CD$;
Leur différence par $AB - CD$;
Leur produit par $AB \times CD$;
Leur quotient par $\frac{AB}{CD}$.

695. La *somme* ou la *différence* des deux droites AB et CD est évidemment une *ligne droite*.

Le *produit* $AB \times CD$ exprime le *rectangle* qui aurait l'une des deux lignes pour base et l'autre pour hauteur.

Quant au *quotient* $\frac{AB}{CD}$, que l'on peut écrire $AB : CD$,

il est évident qu'il représente le *rapport numérique* qui existe entre les deux droites données.

696. Pour indiquer la position des points qui sont liés entre eux par les côtés des figures, on a dû désigner par *deux* lettres, les longueurs de ces droites ; mais, toutes les fois qu'il ne s'agit que d'exprimer les rapports de grandeur entre les quantités que l'on compare, et que l'on peut faire abstraction de la position relative de ces quantités, il est plus simple de désigner chacune d'elles par une seule lettre.

Ainsi, par exemple, si nous exprimons deux lignes droites par a et par b, il est évident que

$a+b$ exprimera leur *somme ;*

$a-b$ sera leur *différence ;*

ab sera un *rectangle* ayant pour base la droite a et pour hauteur la droite b ;

a^2 sera le *quarré* construit sur le côté a ;

$\frac{ab}{2}$ exprimera la moitié du rectangle ab, ou ce qui est la même chose, un *triangle* dont la base serait a et la hauteur b, ou dont la base serait b et la hauteur a.

L'expression $\frac{a(b+c)}{2}$ exprimera la surface d'un trapèze dont la hauteur serait a, et qui aurait pour base les droites b et c (602).

Enfin la fraction $\frac{a}{c}$ sera le *nombre* qui indique combien de fois la droite a contient la droite b, ou le *rapport numérique* de ces deux lignes (352).

697. Suivant l'usage adopté dans le langage algébrique, nous exprimerons par x, y ou z les quantités inconnues, ce qui empêchera de les confondre avec les quantités connues,

que nous désignerons toujours par les premières lettres de l'alphabet.

Le langage algébrique est également utile pour faciliter l'étude des principes, et pour la solution des problèmes. Nous allons commencer par la recherche de quelques principes.

II.

698. **Théorème**. Si nous exprimons deux droites par a et par b, leur somme sera $a + b$.

Multiplions ce binôme par lui-même, nous aurons pour résultat

(1) $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Or, le premier membre de cette équation est évidemment un *quarré* qui a pour côté $a + b$, et si l'on traduit la formule dans le langage géométrique, on voit que

Le quarré qui a pour côté la somme a + b *de deux droites, contient le quarré* a² *de la première droite; plus, deux fois le rectangle* ab, *qui aurait pour base l'une des deux droites, et pour hauteur la seconde, enfin le quarré* b² *de la seconde droite.*

La démonstration du théorème que nous venons d'énoncer, est suffisamment complète, et le résultat peut être considéré comme un corollaire évident du principe de la multiplication algébrique; mais, pour lever tous les doutes, et préparer à l'emploi simultané des langages algébrique et géométrique, nous allons, par une construction, mettre en évidence la rigoureuse exactitude de la formule.

Soit, *fig.* 1, Pl. 18,

$$AB = a;\ BC = b, \text{ on aura } AC = a + b;$$

de sorte que le grand quarré ACDN représente le premier membre de l'équation (1). Mais il est évident que ce quarré contient les termes qui composent le second mem-

bre, et que l'on peut considérer la figure comme la traduction géométrique de la formule.

III.

699. **Théorème**. Si l'on multiplie par lui-même le trinôme $a+b+c$, on obtiendra l'équation

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2.$$

Cette relation est rendue évidente par la construction de la *fig.* 2, dans laquelle on a supposé que

$$AB = a;\ BC = b;\ CD = c.$$

Le quarré ABOH, qui représente le premier membre de l'équation, contient évidemment tous les termes qui composent le second membre.

IV.

700. **Théorème**. Le produit du binôme $(a-b)$ par lui-même donne l'équation

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Pour mettre en évidence les relations exprimées par cette formule, nous supposerons, *fig.* 3, que $AB = a$, et nous construirons le quarré ABCD, qui, par conséquent, vaudra a^2.

Nous ferons ensuite $BO = b$, et nous construirons le quarré $BOKH = b^2$.

Ainsi la figure totale $AOKHDC = a^2 + b^2$.

Supposons actuellement $AS = b$, le rectangle ASCM vaudra ab, et si l'on prolonge KH jusqu'au point N, le rectangle SOKN sera encore égal à ab, puisqu'il aura pour hauteur $OK = b$, et pour base OS, qui vaut

$$AB + BO - AS = a + b - b = a.$$

Or, si de la figure totale on retranche les deux rectangles ASMC, SOKN, il restera le quarré MDNH, dont le côté MD = CD — CM = $a - b$.

Ainsi, en résumant, on aura

$$\text{MDHN} = \text{ABCD} + \text{BOKH} - \text{ASMC} - \text{SOKN}\,;$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

En général, *le quarré qui a pour côté la différence* a — b *de deux droites, contient le quarré* a² *de la première droite, plus le quarré* b² *de la seconde droite, moins deux fois le rectangle qui aurait ces droites pour côtés.*

V.

701. **Théorème**. Si l'on multiplie le binôme $(a + b)$ par le binôme $(a - b)$, on aura

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2.$$

En effet, supposons, *fig.* 4, AB $= a$ et BC $= b$. Il est évident que la figure ACKODH vaudra $a^2 - b^2$. Mais si l'on transporte le rectangle ACKM à la place occupée par le rectangle DOPS, on aura

$$\text{HMPS} = \text{HMOD} + \text{DOPS},$$

$$\text{DOPS} = \text{MACK},$$

$$\text{HMOD} + \text{MACK} = \text{ACKODH},$$

$$\text{ACKODH} = \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{BC}}^2.$$

Ajoutant et réduisant, il restera

$$\text{HMPS} = \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{BC}}^2,$$

ou

$$\text{HS} \times \text{PS} = \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{BC}}^2,$$

et par conséquent

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2\,;$$

c'est-à-dire que *le rectangle qui a pour base la somme* a + b *de deux droites, et pour hauteur la différence* a — b *de ces mêmes droites, est égal à la différence* $a^2 - b^2$ *des quarrés de ces droites.*

702. **Réciproque.** Toutes les fois que l'on aura un binôme égal à la différence de deux quarrés, on pourra le décomposer en deux facteurs, représentés par la somme et par la différence des côtés de ces quarrés. Ainsi on aura

$$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = (AB + BC)\ (AB - BC),$$
$$p^2 - q^2 = (p + q)\ (p - q),$$
$$m^2 - n^2 = (m + n)\ (m - n),$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b) + (a-b)][(a+b) - (a-b)] =$$
$$= (a + b + a - b)\,(a + b - a + b) = 2a \times 2b = 4ab.$$

VI.

703. **Théorème.** Les figures peuvent être considérées comme la traduction géométrique des relations exprimées par les formules correspondantes ; et réciproquement, on peut exprimer par une formule les relations qui existent entre les différentes parties d'une figure.

Ainsi, par exemple, si nous appliquons au triangle rectangle la convention énoncée au numéro 249, nous aurons BC = a; AC = b; AB = c, et par les théorèmes (637, 641), on aura

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Démonstration. On a donné un grand nombre de démonstrations différentes du principe que nous venons d'exprimer en algèbre. Il est évident qu'une seule suffisait, mais pour exercer, et pour faire voir en même temps avec quelle exactitude on est toujours ramené vers les vérités

fondamentales, par la combinaison des principes démontrés, nous allons encore donner la démonstration suivante :

Soit, *fig.* 5, le triangle rectangle ABC, dans lequel nous désignons, comme ci-dessus, BC par a ; AC par b, et AB par c.

Construisons, sur BC, le quarré BCDH, et menons DO perpendiculaire sur AC ; HP perpendiculaire sur DO, et prolongeons BA jusqu'au point Q. Le quarré BCDH sera composé de quatre triangles et d'un quadrilatère.

Les angles des points A, O, P étant droits, l'angle Q du quadrilatère le sera également, et par conséquent, les quatre triangles seront rectangles ; de plus, ils sont égaux, puisqu'ils ont les hypoténuses égales, et que les angles aigus sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (89). Or, de l'égalité des quatre triangles, on déduira évidemment

$$QB = PH = OD = AC = b,$$
$$QH = PD = OC = AB = c,$$

ce qui donne

$$tri.\ BQH = HPD = DOC = CAB = \frac{bc}{2}; \qquad (601)$$

de plus on a

$$QA = QB - AB = b - c,$$
$$PQ = PH - QH = b - c,$$
$$OP = OD - PD = b - c,$$
$$AO = AC - OC = b - c;$$

d'où
$$AOPQ = \overline{AO}^2 = (b - c)^2.$$

Par conséquent, si on fait la somme de toutes les parties qui composent la figure totale, on aura

$$\overline{BC}^2 = 4\ tri.\ ABC + \overline{AO}^2,$$

ou $$a^2 = \frac{4bc}{2} + (b-c)^2;$$

effectuant les calculs et réduisant, on obtient

$$a^2 = 2bc + b^2 + c^2 - 2bc;$$

d'où $$a^2 = b^2 + c^2.$$

VII.

704. **Théorème**. *Recherche des relations qui existent entre les côtés d'un triangle quelconque.*

Supposons d'abord, *fig.* 8, que l'angle A soit *aigu*.

Concevons la perpendiculaire BD, que nous nommerons h, et désignons par x, la distance AD comprise entre cette perpendiculaire et le sommet de l'angle que nous considérons. On aura $CD = b - x$ (249).

Les propriétés démontrées du triangle rectangle, nous donneront les équations

(1) $$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2,$$

(2) $$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Si nous remplaçons chaque terme par la lettre adoptée pour son expression algébrique, nous aurons

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2,$$
$$c^2 = h^2 + x^2.$$

Retranchant la seconde équation de la première, et faisant passer b^2 dans le second membre, on aura successivement

$$a^2 - c^2 = (b-x)^2 - x^2,$$
$$a^2 - c^2 = b^2 + x^2 - 2bx - x^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

705. Si l'angle A était *obtus*, *fig.* 6, on aurait

CD $= b + x$, et les équations (1) et (2), également applicables à la nouvelle figure, deviendraient

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2,$$
$$c^2 = h^2 + x^2;$$

qui, après toutes réductions, donneraient

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

706. Les formules précédentes peuvent être obtenues par la comparaison directe des-parties de la figure ; en effet, supposons que dans le triangle ABC, *fig.* 7, l'angle A soit *aigu;* construisons les quarrés des trois côtés ; abaissons les perpendiculaires AG, BR, CZ, et traçons les six droites AK, AU; BS, BN ; CM, CH. Nous aurons évidemment

$$\overline{BC}^2 = BDGK + DCGU,$$
$$BDGK = 2.ABK, \quad (598)$$
$$2.ABK = 2.HBC, \quad (143)$$
$$2.HBC = BOZH, \quad (598)$$
$$BOZH = \overline{AB}^2 - AOZM,$$
$$DCGU = 2.ACU, \quad (598)$$
$$2.ACU = 2.BCS, \quad (143)$$
$$2.BCS = ICSR, \quad (598)$$
$$ICSR = \overline{AC}^2 - AIRN.$$

Ajoutant et réduisant, on aura

(1) $$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - AOZM - AIRN.$$

Ainsi, *le quarré du côté opposé à l'angle aigu* A, *est égal à la somme des quarrés des côtés qui comprennent cet angle, moins la somme des deux rectangles marqués sur la figure par des hachures.*

Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'égalité de ces deux rectangles ; pour y parvenir, on dira

AIRN = 2.BAN, (598)
2.BAN = 2.MAC, (143)
2.MAC = AOZM. (598)

Ajoutant et réduisant, on a

(2) AIRN = AOZM.

Ajoutant cette dernière équation avec l'équation (1), on obtient

$$\overline{BC}^2 + AIRN = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - AIRN,$$

d'où

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AIRN,$$

et par conséquent

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

707. En appliquant un raisonnement analogue à la *fig.* 10, on obtiendra la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Il suffira de remplacer partout le signe — par le signe +, et de retrancher l'équation (2) de l'équation (1), au lieu de les ajouter.

708. Nous avons exprimé par x la distance comprise entre le pied de la perpendiculaire et le sommet de l'angle que l'on considère, parce que dans les applications cette quantité est presque toujours inconnue.

709. **Remarque.** *Fig.* 8. Au lieu du terme $2bx$, on peut écrire $2cy$. Dans ce cas, y *serait la distance entre le sommet de l'angle* A *et le pied de la perpendiculaire* CI *abaissée sur le côté* AB = c.

Cela résulte évidemment de la démonstration du numéro 706, mais on peut encore y parvenir de la manière suivante : les deux triangles BDA, CDI, sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont l'angle A

commun; donc, en comparant les côtés homologues, on aura

$$AC : AB :: AI : AD,$$

ou $$b : c :: y : x;$$

donc $$bx = cy,$$

et par conséquent $$2bx = 2cy.$$

710. Discussion. On peut facilement mettre en évidence toutes les relations qui se rattachent à la question précédente. Il suffit, pour cela, de discuter les formules obtenues, afin de reconnaître les modifications qu'elles éprouvent lorsque l'on fait varier les quantités dont elles dépendent. Pour cela, reprenons la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Supposons, *fig.* 9, que l'on fasse mouvoir le sommet de l'angle B sur la demi-circonférence décrite du point A, comme centre avec un rayon $AB = c$.

Lorsque l'angle A se fermera, la perpendiculaire h deviendra h'; le segment x, et par conséquent le terme $2bx$, augmenteront de valeur; d'où il résulte que la valeur de a^2 diminuera : ce qui est conforme au théorème (132).

Lorsque l'angle A sera très-petit, la perpendiculaire sera très-courte, et le segment x sera très-près d'être égal au côté $AB = c$.

Enfin il est évident que si l'angle A se fermait entièrement, la perpendiculaire se réduirait à *zéro*, le segment x deviendrait égal au côté c, et la formule serait

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc;$$

d'où $$a^2 = (b - c)^2;$$

ce qui donne $$a = (b - c).$$

Or, on pourra déduire de là

$$a + c = b,$$

et l'un des côtés étant égal à la somme des deux autres, le triangle aurait cessé d'exister.

Si nous revenons au triangle donné ABC, et que nous augmentions l'ouverture de l'angle A, la perpendiculaire se rapprochera du point A, le segment x, et par conséquent le terme $2bx$ diminueront, et la valeur de a^2 augmentera.

Lorsque l'angle A vaudra 90°, la perpendiculaire h'' viendra se confondre avec le côté AB, et le segment x étant réduit à *zéro*, la formule deviendra

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times 0;$$

d'où $$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (703)$$

Si nous continuons à faire tourner le côté AB, l'angle A devient obtus, la perpendiculaire h''' passe à gauche du point A, ce que l'on exprime algébriquement en changeant le signe du segment x, qui devient alors *négatif*.

Dans ce cas, la formule devient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times - x;$$

d'où $$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Si l'angle A devenait très-grand, et qu'il fût près de valoir 180°, la perpendiculaire serait très-courte, et le segment x très-près d'être égal au côté AB $= c$.

Enfin, si l'angle A valait 180°, la perpendiculaire serait encore une fois réduite à *zéro*, le segment x serait égal à c, et la formule deviendrait

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc;$$

d'où $$a^2 = (b + c)^2;$$

ce qui donne $$a = b + c.$$

Alors le côté a étant égal à la somme des deux autres, le triangle cesserait d'exister.

711. En résumant, on reconnaît que la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

exprime toutes les relations qui existent entre les trois côtés d'un triangle ABC, quelles que soient les modifications de forme résultant de l'augmentation ou de la diminution de l'angle A.

712. Pour mieux fixer les idées, on a rassemblé toutes les hypothèses dans le tableau suivant.

HYPOTHÈSES.	FORMULES.	
$A = 0°$.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$.	$a = b - c$.
$A < 90°$.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$.	$a^2 < b^2 + c^2$.
$a = 90°$.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times 0$.	$a^2 = b^2 + c^2$.
$a > 90°$.	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$.	$a^2 > b^2 + c^2$.
$a = 180°$.	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$.	$a = b + c$.

713. Les relations que nous venons de mettre en évidence auraient pu également être déduites de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

VIII.

714. **Théorème.** *Les trois perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés, passent par un même point.*

Démonstration. *Fig.* 12. Construisons les deux perpendiculaires CD, BH, et par le point où elles se rencontrent, traçons la droite OP, perpendiculaire sur BC; il ne reste plus qu'à démontrer que cette troisième perpendiculaire contient le point A.

Supposons que cela n'ait pas lieu, et que la droite PO rencontre le côté CA, en A', et le côté BA prolongé en A''. Joignons A' avec B et A'' avec C; exprimons par b et b', les deux parties BO et OH de la perpendiculaire BH; par c

et c' les deux parties CO et OD de la perpendiculaire CD, et par a la perpendiculaire OP.

Les deux triangles BOD, COH sont rectangles en D et en H; de plus ils ont l'angle BOD = COH, comme opposé par le sommet; donc ils sont semblables, et l'on a la proportion

$$b : c :: c' : b'.$$

Les deux triangles BOP, OHA' sont rectangles en P et en H; de plus ils ont l'angle BOP = A'OH; donc ils sont semblables, et l'on doit avoir la proportion

$$a : b :: b' : OA'.$$

Enfin, les deux triangles COP, DOA'', rectangles en P et en D, ont l'angle COP = DOA''; donc ils sont semblables; ce qui donne la proportion

$$a : c :: c' : OA''.$$

Or, des trois proportions précédentes, on pourra déduire les équations

$$bb' = cc'$$
$$a \times OA' = bb'$$
$$cc' = a \times OA'';$$

multipliant et réduisant, on aura

$$OA' = OA''.$$

Ce qui ne peut avoir lieu que si les deux points A' et A'' coïncident avec le point A.

IX.

715. **Théorème.** *Les trois droites qui joignent les sommets d'un triangle avec les milieux des côtés opposés, passent par un même point.*

Démonstration. *Fig.* 13. Joignons les sommets B et C avec les milieux des côtés opposés, par les deux droites

BH, CD, et traçons OP qui joint le point O avec le milieu du troisième côté BC; il ne restera plus qu'à démontrer que la droite PO contient le point A.

Supposons que cela n'ait pas lieu, et que le prolongement de PO rencontre le côté CA en A' et le côté BA prolongé en A''.

Traçons les trois droites DH, DP, PH, et désignons par b et b' les deux parties BO, OH de la droite BH; par c et c', les deux parties CO, OD de la droite CD, et par a la distance OP.

La droite DH qui joint les milieux des côtés AB, AC, sera parallèle à BC; par conséquent, les deux triangles DOH, BOC, seront semblables; ce qui donnera la proportion

$$b : b' :: c : c'.$$

La droite DP étant parallèle au côté CA', les deux triangles DOP, COA' seront semblables, et l'on aura la proportion

$$c : c' :: a : \mathrm{OA}'.$$

Enfin, la droite PH étant parallèle au côté BA'', les deux triangles POH, BOA'' seront semblables, et l'on aura la proportion

$$b : b' :: a : \mathrm{OA}''.$$

Les trois proportions précédentes donneront évidemment

$$bc' = b'c,$$
$$c \times \mathrm{OA}' = ac',$$
$$ab' = b \times \mathrm{OA}'';$$

multipliant et réduisant, on aurait

$$\mathrm{OA}' = \mathrm{OA}'';$$

ce qui ne peut avoir lieu que si les deux points A' et A'' coïncident avec le point A.

X.

716. **Théorème**. *Fig.* 11. Désignons par h la perpendiculaire abaissée du point A, et par h', la perpendiculaire du point B; les deux triangles ACD, BCK seront semblables, et l'on aura la proportion

$$AD : BK :: AC : BC;$$

d'où $$h : h' :: b : a;$$

ce qui donne $$ah = bh',$$

et par conséquent $$\frac{ah}{2} = \frac{bh'}{2}.$$

En exprimant par h'' la perpendiculaire abaissée du point C, on aurait également

$$\frac{ah}{2} = \frac{ch''}{2}.$$

D'où il résulte que, *pour calculer la surface d'un triangle, on peut prendre pour base le côté que l'on veut.*

XI.

717. **Théorème**. *Fig.* 11. Désignons par x et par y les deux segments déterminés sur le côté a par la perpendiculaire abaissée du point A; le triangle rectangle ADB donnera

$$h^2 + x^2 = c^2.$$

Le triangle rectangle ADC donne

$$b^2 = h^2 + y^2;$$

ajoutant et réduisant, on a

$$x^2 + b^2 = y^2 + c^2,$$

d'où $$x^2 - y^2 = c^2 - b^2.$$

Ainsi, *la différence des quarrés des deux segments déterminés par la perpendiculaire, est égale à la différence des quarrés des côtés adjacents.*

718. Le corollaire du numéro 638 est évidemment un cas particulier du principe qui vient d'être démontré.

719. Si l'on décompose en facteurs le premier membre de l'équation que nous venons d'obtenir, on a (702)

$$(x+y)(x-y)=c^2-b^2;$$

mais $$x+y=a.$$

Divisant la première équation par la seconde, on obtient

$$x-y=\frac{c^2-b^2}{a},$$

ajoutant cette équation avec celle qui précède, on a

$$2x=a+\frac{c^2-b^2}{a},$$

qui devient successivement

$$2ax=a^2+c^2-b^2$$
$$b^2=a^2+c^2-2ax.$$

Ce dernier résultat n'est autre chose que le théorème des numéros 704, 706.

Cette concordance prouve l'exactitude des transformations par lesquelles nous avons passé.

XII.

720. Théorème. *Fig.* 11. Désignons par h, h', h'' les perpendiculaires abaissées sur les côtés a, b, c d'un triangle; exprimons ensuite par x et y les deux segments du côté a; par x' et y' les deux segments du côté b; enfin, par x'' et y'' les deux segments du côté c, nous aurons (717)

$$x^2-y^2=c^2-b^2,$$
$$x'^2-y'^2=a^2-c^2,$$
$$x''^2-y''^2=b^2-a^2;$$

ajoutant et réduisant, on aura

$$x^2+x'^2+x''^2-y^2-y'^2-y''^2=0,$$

d'où $$x^2+x'^2+x''^2=y^2+y'^2+y''^2.$$

Ainsi, *la somme des quarrés des trois segments à gauche des perpendiculaires, est égale à la somme des quarrés des trois segments à droite.*

XIII.

721. **Théorème.** *Fig.* 11. La similitude des triangles ADB, BIC donne la proportion

$$x : y'' :: c : a.$$

La similitude des triangles ADC, BKC donne

$$x' : y :: a : b;$$

enfin, la similitude des triangles BAK, CAI donne

$$x'' : y' :: b : c.$$

Les proportions précédentes conduisent aux trois équations

$$ax = cy'',$$
$$bx' = ay,$$
$$cx'' = by';$$

multipliant et réduisant, on obtient

$$xx'x'' = yy'y''.$$

Ainsi, *le produit des trois segments à gauche des perpendiculaires est égal au produit des trois segments à droite.*

XIV.

722. **Théorème.** *Fig.* 15. Désignons par d la droite AO qui joint le point A avec le milieu du côté opposé, que nous nommerons $2u$, et par x le segment OH compris entre le point O et le pied de la perpendiculaire AH, nous aurons par le théorème (704)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 - 2CO \times OH;$$

ou, ce qui est la même chose,

(1) $$b^2 = d^2 + u^2 - 2ux;$$

mais, dans le triangle AOB, l'angle en O étant obtus, on aura (705)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + 2OB \times OH,$$

qui devient

(2) $$c^2 = d^2 + u^2 + 2ux;$$

ajoutant l'équation (1) avec (2), et réduisant, on obtient

$$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2u^2,$$

c'est-à-dire que *la somme des quarrés des côtés adjacents à l'angle du sommet, est égale à deux fois le quarré de la moitié de la base, plus deux fois le quarré de la droite qui joint le sommet avec le milieu de la base.*

XV.

723. **Théorème.** *Fig.* 16. Désignons par d, d', d'' les droites qui joignent les trois sommets d'un triangle avec les milieux des côtés opposés a, b, c; exprimons :

Par u, la moitié du côté a;

Par n, la moitié du côté b;

Par ν, la moitié du côté c;

Nous aurons (722)

$$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2u^2$$
$$a^2 + c^2 = 2d'^2 + 2n^2$$
$$a^2 + b^2 = 2d''^2 + 2\nu^2;$$

ajoutant et réduisant, on aura

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2d^2 + 2d'^2 + 2d''^2 + 2u^2 + \\ + 2n^2 + 2\nu^2,$$

et par conséquent

(1) $$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + d'^2 + d''^2 + u^2 + n^2 + \nu^2;$$

mais $u = \frac{a}{2}$; $n = \frac{b}{2}$; $\nu = \frac{c}{2}$;

donc $u^2 = \frac{a^2}{4}$; $n^2 = \frac{b^2}{4}$; $\nu^2 = \frac{c^2}{4}$,

et par conséquent

(2) $$u^2 + n^2 + \nu^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4};$$

ajoutant les équations (1) et (2), on aura

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + d'^2 + d''^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$

qui, après toutes réductions, devient

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + d'^2 + d''^2).$$

Ainsi *trois fois la somme des quarrés des côtés d'un triangle est égal à quatre fois la somme des quarrés des droites qui joignent les sommets avec les milieux des côtés opposés.*

XVI.

724. **Théorème.** *Fig.* 14. Les côtés opposés d'un parallélogramme étant égaux, on peut employer la même lettre a pour désigner chacun des côtés AD, BC, et la lettre b pour les côtés AB, CD.

De plus, les diagonales se coupant en parties égales, nous exprimerons AC par $2u$, et BD par 2ν.

Ces notations étant admises, le triangle ABC donnera

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{BO}^2, \qquad (722)$$

qui devient, en substituant les notations ci-dessus,

$$a^2 + b^2 = 2u^2 + 2\nu^2;$$

multipliant le tout par 2, on aura

$$2a^2 + 2b^2 = 4u^2 + 4\nu^2,$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = (2u)^2 + (2v)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

Par conséquent, *la somme des quarrés des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des quarrés des deux diagonales.*

CHAPITRE II.

Solution graphique des problèmes.

I.

725. **Considérations générales.** La solution d'un problème de géométrie dépend ordinairement de certaines opérations de calcul ou de compas. Si les opérations à faire sont les conséquences directes des relations qui existent entre les quantités données et celles que l'on cherche, il suffit de découvrir le théorème qui exprime ces relations ; c'est le cas de la plus grande partie des problèmes résolus dans les livres précédents.

Mais, il arrive souvent que le théorème qui contient les relations géométriques énoncées dans la question, n'est pas celui qui donne les moyens d'exécuter les opérations. Ainsi, par exemple, il est possible que les conditions auxquelles l'inconnue doit satisfaire, dépendent d'un théorème du troisième ou du quatrième livre, tandis que les opérations à effectuer seraient la conséquence d'un théo-

rème du second livre ou du premier. C'est alors que l'algèbre sera d'un grand secours

En effet, si l'on exprime par une formule, les relations géométriques qui doivent exister entre l'inconnue et les quantités données, les transformations algébriques conduiront *toujours* directement, et sans hésitation, au théorème que l'on doit appliquer pour obtenir l'inconnue; et cela, quel que soit le mode de solution que l'on devra employer; c'est-à-dire, que si l'on veut résoudre la question par le calcul, l'algèbre dira quelles sont les opérations d'arithmétique à effectuer; et si l'on préfère employer la règle et le compas, l'algèbre dira également, quand il faudra construire une perpendiculaire, une parallèle, ou décrire une circonférence de cercle.

Nous allons étudier d'abord les constructions graphiques, et dans le chapitre suivant nous verrons les solutions par le calcul.

II.

726. **Définitions.** Pour appliquer l'algèbre à la solution d'un problème de géométrie, il faut

1° *Exprimer par une ou plusieurs équations les conditions auxquelles l'inconnue doit satisfaire;*

2° *Résoudre ces équations;*

3° *Effectuer les opérations de calcul ou de compas indiquées par les signes.*

La traduction dans le langage algébrique, dépend de la question qu'il s'agit de résoudre, et l'on devra s'exercer à cette étude par la solution d'un grand nombre de problèmes.

La manière de résoudre les équations est suffisamment développée dans les traités d'algèbre.

Nous devons donc, avant d'aller plus loin, nous occuper de l'interprétation des formules.

727. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les quantités désignées par a, b, c, d, etc., sont des lignes droites.

728. Nous savons déjà (*algèbre*) que toute expression de la forme a^0 représente l'unité, parce qu'on peut toujours supposer qu'elle provient de $\frac{1 \cdot a^n}{a^n}$.

729. La formule $\frac{a}{b}$ représente un *nombre*; elle exprime le **rapport numérique** de a à b, et l'on pourrait obtenir sa valeur par le moyen indiqué au numéro 357.

Si l'expression $\frac{a}{b}$ représente un *nombre*, il en sera de même de $\frac{a^n}{b^n}$, qui n'est autre chose que $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, ou la n[ième] puissance du rapport $\frac{a}{b}$.

Construction des formules.

III.

730. **Théorème**. *Tout monôme ou polynôme du premier degré peut être considéré comme l'expression d'une ligne.*

Les signes expriment quelles sont les opérations qu'il faut effectuer pour obtenir la ligne demandée. La nature de cette ligne dépend de certains caractères algébriques, qu'il est toujours facile de reconnaître, et que nous allons indiquer.

731. En général, toutes les opérations graphiques se réduisent à *cinq*, qui sont exprimées par les formules suivantes :

$x = a + b - c$. *somme et différence de lignes.*

$x = \frac{bc}{a}$ . . . . . *quatrième proportionnelle.*

$x = \sqrt{ab}$. . . . *moyenne proportionnelle.*

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$. *hypoténuse.*

$x = \sqrt{a^2 - b^2}$. *côté d'angle droit.*

732. **Démonstration.** *La formule* $x = a + b - c$ *est évidemment une somme et différence de lignes.*

Pour la construire, on fera la somme des lignes a et b, et l'on en retranchera la ligne c, en opérant comme aux numéros 224 et 225.

733. *La formule* $x = \frac{bc}{a}$ *est une quatrième proportionnelle.*

En effet, si nous multiplions les deux membres par a, nous aurons $ax = bc$.

Or (*Arith.-Alg.*), les deux facteurs a et x peuvent être considérés comme les extrêmes d'une proportion dans laquelle b et c seraient les moyens. Ainsi, la relation exprimée par la formule proposée revient à celle-ci :

$$a : b :: c : x$$

ou

$$a : c :: b : x.$$

Mais, quelle que soit la forme que l'on adoptera, il est évident que x est le *quatrième* terme d'une proportion. Cela explique suffisamment, pourquoi nous donnerons toujours par la suite le nom de *quatrième proportionnelle* à toute expression de la forme $\frac{bc}{a}$.

734. Avant d'aller plus loin, nous devons remarquer que la forme algébrique d'une quatrième proportionnelle est *une fraction dont le numérateur se compose de deux facteurs, tandis que le dénominateur n'en contient qu'un ;* et, pour ne pas être obligé d'écrire la proportion, chaque fois que l'on rencontrera une quatrième proportionnelle, il faut se rappeler que

Le dénominateur est à l'un des facteurs du numérateur, comme le second facteur du numérateur est à l'inconnue.

Ainsi les formules

$$y = \frac{pq}{m}; \quad z = \frac{(d+h)(s-u)}{(m-n)};$$

sont des quatrièmes proportionnelles.

La première correspond à la proportion

$$m : p :: q : y,$$

et la seconde donne

$$(m-n) : (d+h) :: (s-u) : z.$$

735. La formule $u = \frac{b^2}{a}$ est le quatrième terme de la proportion $a : b :: b : u$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\div a : b : u.$$

On peut dire que $\frac{b^2}{a}$ représente une *troisième proportionnelle*. Mais la manière d'opérer pour construire cette formule, étant la même que pour la quatrième proportionnelle, nous lui conserverons cette dernière dénomination.

736. Nous avons vu, aux numéros 442 et 443, comment on peut trouver graphiquement la quatrième proportionnelle aux trois droites a, b, c, et par conséquent aussi, comment on construirait l'expression $\frac{b^2}{a}$.

737. *La formule* $x = \sqrt{ab}$ *est une moyenne proportionnelle*, car si l'on élève chacun des deux membres au quarré, on aura $x^2 = ab$,
d'où $a : x :: x : b$.

Par conséquent, x est une moyenne proportionnelle entre a et b.

738. En général, on remarquera, que la forme algébrique d'une *moyenne proportionnelle* consiste en *un radical du second degré, sous lequel il y a un produit de deux facteurs du premier degré, ou linéaires* (729), et l'on devra se rappeler, que ces facteurs sont les extrêmes de la proportion continue, dont le terme moyen est la valeur de l'inconnue. Ainsi les quantités

$$y = \sqrt{pq}, \quad z = \sqrt{(p+q)(m+n)}$$

sont des moyennes proportionnelles.

La première résulte de la proportion

$$p : y :: y : q.$$

La seconde provient de

$$(p+q) : z :: z : (m+n).$$

Si l'on avait l'expression $u = \sqrt{a^2 - b^2}$, on remplacerait $a^2 - b^2$ par $(a+b)(a-b)$, et l'on aurait alors

$$u = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$

d'où $(a+b) : u :: u : (a-b)$.

Il est évident, qu'à l'inspection de la formule primitive on peut énoncer la proportion sans qu'il soit nécessaire de l'écrire; il suffit pour cela, de mettre les extrêmes en évidence, en décomposant en deux facteurs le monôme qui est sous le radical.

739. Les opérations que nous avons données aux numéros 444 et 445 sont les deux manières les plus simples de construire une moyenne proportionnelle.

740. *La formule* $x = \sqrt{b^2 + c^2}$ *est une hypoténuse.*

En effet, en élevant chacun des deux membres au quarré on aura $x^2 = b^2 + c^2$.

Or, si l'on connaissait la valeur de x, et si l'on construisait un triangle avec les trois droites b, c, x, ce triangle serait *rectangle*, puisque le quarré d'un de ses côtés serait égal à la somme des quarrés des deux autres côtés ; et, dans ce triangle, la lettre x serait évidemment *l'hypoténuse.*

741. Par conséquent, toutes les fois qu'une ligne sera exprimée par *un radical du second degré, sous lequel il y aura la somme de deux quarrés*, cette ligne sera *l'hypoténuse d'un triangle rectangle.*

Ainsi lorsqu'on aura

$$y = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad z = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$
$$u = \sqrt{(p+q)^2 + (d-h)^2},$$

on pourra dire que y est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dans lequel p et q sont les deux côtés de l'angle droit ; que z est l'hypoténuse d'un second triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont a et $\frac{a}{2}$; enfin, que u est l'hypoténuse d'un troisième triangle rectangle, dans lequel un des côtés de l'angle droit serait $(p+q)$, tandis que le second côté de l'angle droit serait $(p-q)$.

742. Pour obtenir une hypoténuse, on fera les opérations indiquées au numéro 679.

743. *La formule* $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ *est un côté d'angle droit.*

En effet, si l'on élève chacun des membres au quarré, on obtient

$$x^2 = a^2 - b^2\,;$$

d'où

$$x^2 + b^2 = a^2.$$

Par conséquent, le triangle qui aurait pour côtés les trois droites a, b, x, serait encore rectangle, puisque le quarré d'une de ces lignes est égal à la somme des quarrés des deux autres. Mais, il est évident, que dans ce triangle, c'est la ligne a qui serait l'hypoténuse, et que par conséquent x serait l'un des côtés de l'angle droit.

744. On devra donc se rappeler, que la forme algébrique d'un côté d'angle droit, consiste dans *un radical du second degré, sous lequel il y a la différence de deux quarrés.*

Ainsi, par exemple,

$$y=\sqrt{p^2-q^2},\quad z=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$
$$u=\sqrt{(p+q)^2-(d-h)^2}$$

sont des côtés d'angles droits.

Dans le premier triangle, l'hypoténuse est p, et les côtés de l'angle droit sont q et y.

Dans le second triangle, l'hypoténuse est a, et les côtés de l'angle droit sont $\frac{a}{2}$ et z.

Enfin, dans le troisième triangle, $(p+q)$ sera l'hypoténuse, et les autres côtés seront $(d-h)$ et u.

745. On pourra toujours obtenir un côté d'angle droit en opérant comme nous l'avons dit aux numéros 681, 682.

IV.

746. **Formules composées.** Toute expression algébrique du premier degré, qui ne contient pas de radicaux supérieurs au second degré, peut être ramenée à l'une des cinq opérations qui précèdent ; et, quelque composée que

soit la formule, il est toujours facile de reconnaître par quelles constructions graphiques on peut obtenir l'inconnue.

747. La construction d'une formule se composera souvent de plusieurs opérations diverses ; mais, pour fixer les idées, nous donnerons à l'inconnue le nom correspondant à la dernière des constructions que l'on devra faire pour obtenir sa valeur.

V.

748. **Sommes ou différences de lignes.** *Toutes les fois que l'expression algébrique de l'inconnue se composera de plusieurs termes du premier degré, séparés par les signes + ou —, nous lui donnerons le nom de somme ou différence de lignes.*

Construction. Nous avons dit au numéro 225, que pour ajouter ou retrancher plusieurs lignes droites, il fallait faire la somme de toutes celles qui ont le signe +, faire ensuite la somme de toutes celles qui ont le signe —, et prendre la différence des deux sommes.

Il est évident que cette construction sera toujours la même, quels que soient le nombre et la forme des termes que l'on veut ajouter ou retrancher, pourvu que chacun de ces termes représente une *ligne*, ce qui aura lieu toutes les fois qu'il sera du *premier degré* (729).

749. Si la somme des lignes que l'on doit retrancher était plus grande que la somme des lignes que l'on doit ajouter, la valeur de l'inconnue aurait le signe moins, et l'on sait (*Algèbre*), que dans ce cas, elle doit être portée en sens inverse de celui que l'on avait supposé dans la question.

VI.

750. **Quatrièmes proportionnelles**. *Toutes les fois que l'inconnue sera exprimée par une fraction algébrique dont le numérateur sera d'un degré plus élevé que le dénominateur, nous lui donnerons le nom de quatrième proportionnelle.*

Construction. Soit, par exemple, la formule

$$x=\frac{abc}{dh}.$$

On décomposera le second membre en facteurs de la manière suivante :

$$x=\frac{ab}{d}\times\frac{c}{h}.$$

Or, il résulte de ce que nous avons dit au numéro 734, que le premier facteur $\frac{ab}{d}$ est une quatrième proportionnelle, et que le facteur $\frac{c}{h}$ est un *nombre* (729).

On pourrait donc obtenir chacun de ces facteurs par une construction graphique (442, 443, 357) après quoi, multipliant la ligne par le nombre, on aurait la valeur de l'inconnue x. Mais il n'est pas nécessaire de chercher la valeur numérique du facteur $\frac{c}{d}$. En effet, supposons qu'après avoir construit la quatrième proportionnelle $\frac{ab}{c}$, on exprime cette quantité par y, et qu'on la substitue dans la valeur de x, on aura

$$x=\frac{ab}{c}\times\frac{d}{h}=y\times\frac{d}{h}=\frac{yd}{h}.$$

Ainsi,

1re *Opération*. On construira la quatrième proportionnelle $\frac{ab}{c}$, ce qui donnera y. (734)

2e *Opération*. On construira la quatrième proportionnelle $\frac{yd}{h}$, et l'on aura x. (734)

2e Exemple. Soit $x = \frac{abcde}{pqrs}$, on écrira

$$x = \frac{ab}{p} \times \frac{c}{q} \times \frac{d}{r} \times \frac{e}{s};$$

donc, x est égal à la quatrième proportionnelle $\frac{ab}{p}$, multipliée par le produit des trois nombres $\frac{c}{q}, \frac{d}{r}, \frac{e}{s}$.

On fera $\frac{ab}{p} = y$, d'où $x = \frac{yc}{q} \times \frac{d}{r} \times \frac{e}{s}$;

on fera ensuite $\frac{yc}{q} = y'$, d'où $x = \frac{y'd}{r} \times \frac{e}{s}$;

on fera $\frac{y'd}{r} = y''$, et l'on aura $x = \frac{y''e}{s}$.

Ainsi on construira successivement

$$y = \frac{ab}{p}; \quad y' = \frac{yc}{q}; \quad y'' = \frac{y'd}{r}; \quad x = \frac{y''e}{s}. \qquad (734)$$

Si l'on fait le produit de ces quatre équations, on aura, en réduisant, $x = \frac{abcde}{pqrs}$, ce qui prouve l'exactitude de la décomposition précédente.

On construirait de la même manière les formules

$$x = \frac{abcdef}{pqmns}; \quad x = \frac{abdefgh}{pqmnsv}.$$

3e Exemple. Pour construire la formule $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$,

on fera $a^2 + b^2 = y^2$; d'où $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, (740)

et l'on aura $x = \frac{y^2}{c}$. (735)

2e *Solution*. On fera $b^2 = ay$, d'où $y = \frac{b^2}{a}$, (735)

et l'on aura $x = \frac{a^2 + ay}{c} = \frac{a(a+y)}{c}$. (734)

3e *Solution*. On aurait pu considérer la formule proposée comme exprimant une somme de lignes.

Pour cela, il aurait fallu écrire $x = \frac{a^2 + b^2}{c} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$,

en faisant alors $\frac{a^2}{c} = y$; $\frac{b^2}{c} = y'$, on aurait eu $x = y + y'$.

Ainsi on construirait

$$y' = \frac{a^2}{c}; \quad y = \frac{b^2}{c}; \quad x = y + y'. \qquad (734, 732)$$

4e Exemple. Pour construire la formule $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$,

on remarquera que le numérateur $a^2 - b^2$ est décomposable en deux facteurs du premier degré (702), et l'on

aura de suite $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$. (734)

5e Exemple. Soit la formule

$$x = \frac{a^3 + b^2c + dhm}{p^2 + q^2}.$$

On fera $b^2c = a^2y$; $dhm = a^2y'$; $p^2 = az$; $q^2 = az'$,

d'où $$y = \frac{b^2c}{a^2}; y' = \frac{dhm}{a}; z = \frac{p^2}{a^2}; z' = \frac{q^2}{a}, \qquad (734)$$

et l'on aura $$x = \frac{a^3 + a^2y + a^2y'}{az + az'} = \frac{a(a + y + y')}{z + z'}; \qquad (734)$$

on fera $$(a + y + y') = u; \quad (z + z') = v,$$

et l'on aura $$x = \frac{au}{v}. \qquad (734)$$

2° *Solution*. Si dans la formule proposée, on fait $p^2 + q^2 = y^2$, on aura

$$x = \frac{a^3 + b^2c + dhm}{y^2} = \frac{a^3}{y^2} + \frac{b^2c}{y^2} + \frac{dhm}{y^2}; \qquad (732)$$

de sorte que x est la somme des trois termes $\frac{a^3}{y^2}$, $\frac{b^2c}{y^2}$, $\frac{dhm}{y^2}$, que nous désignerons par z, z', z''. Ainsi, on construira successivement les quantités y, z, z', z'', et enfin

$$x = z + z' + z''.$$

751. On voit que la même formule peut être construite de plusieurs manières.

Ainsi la quantité

$$x = \frac{a^3 + b^2c + dhm}{p^2 + q^2}$$

sera une quatrième *proportionnelle*, si nous employons la première solution, tandis que si nous décomposons le second membre en trois termes, comme nous venons de le faire, l'inconnue x sera une *somme* de lignes. En général, chaque transformation donne une construction différente, et l'on peut obtenir par conséquent autant de solutions que l'on veut; il ne reste plus qu'à choisir, dans chaque cas, celle qui donne lieu aux opérations

les plus simples ; mais, ce qui est surtout essentiel à remarquer, c'est que *toutes les opérations graphiques se réduisent toujours à l'une des cinq formules du numéro* 731.

VII.

752. **Moyennes proportionnelles**. *Lorsque l'inconnue sera égale à la racine quarrée d'un monôme du second degré, nous la nommerons moyenne proportionnelle.*

Construction. Pour obtenir une moyenne proportionnelle, il faut décomposer le *monôme* qui est sous le radical en deux facteurs du *premier degré*, qui sont les extrêmes d'une proportion continue, dans laquelle l'inconnue serait le terme moyen. Ainsi, par exemple, pour construire la formule $x = \sqrt{3a^2}$, on écrira $x = \sqrt{3a \times a}$. (738)

2° Exemple. Pour construire $x = \sqrt{\frac{2a^2}{5}}$,

on écrira $$x = \sqrt{a \times \frac{2a}{5}}. \quad (738)$$

3° Exemple. Soit $x = \sqrt{\frac{pqm}{s}}$,

on écrira $$x = \sqrt{p \times \frac{qm}{s}}; \quad (738)$$

on fera $\frac{qm}{s} = y$, ce qui donnera $x = \sqrt{py}$; ainsi on construira :

1° $$y = \frac{qm}{s} \quad (734)$$

2° $$x = \sqrt{py}. \quad (738)$$

4e Exemple. Soit $x = \sqrt{63a^2}$,

on écrira $x = \sqrt{9a \times 7a}$. (738)

Pour construire la formule précédente, on aurait pu écrire $x = \sqrt{21a \times a}$.

Mais cette seconde solution ne vaudrait pas la première, parce que les deux facteurs étant très-inégaux, la perpendiculaire couperait la circonférence trop obliquement (444, 445).

VIII.

753. **Hypoténuses**. *Lorsque sous un radical du second degré on aura la somme d'un nombre quelconque de termes du second degré, l'inconnue sera une hypoténuse.*

Construction. Soit par exemple la formule

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Il suffira de construire un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit seraient a et $\frac{a}{2}$. L'hypoténuse sera évidemmeut la valeur de l'inconnue demandée.

2e *Solution*. On pourrait encore écrire

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \sqrt{a \times \frac{5a}{4}}. \quad (738)$$

Dans ce cas, l'inconnue serait une moyenne proportionnelle.

2e Exemple. Construire la formule

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

on fera $a^2 + b^2 = y^2$, d'où $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, (741)

et l'on aura $x = \sqrt{y^2 + c^2}$. (741)

3° **Exemple**. Construire la formule

$$x = \sqrt{a^2 + bc}.$$

On fera $bc = y^2$, d'où $y = \sqrt{bc}$ (738)

et l'on aura $x = \sqrt{a^2 + y^2}$. (741)

4° **Exemple**. Construire la formule

$$x = \sqrt{61a^2}.$$

On pourrait écrire $x = \sqrt{61a \times a}$. (738)

Dans ce cas, x serait une moyenne proportionnelle, mais, par suite de la grande inégalité des deux facteurs, les constructions des numéros 444, 445, seraient peu exactes. Dans ce cas, il vaudrait mieux écrire

$$x = \sqrt{60a^2 + a^2};$$

on ferait $60a^2 = y^2$; d'où $y = \sqrt{12a \times 5a}$, (738)

et l'on aurait $x = \sqrt{y + a^2}$. (741)

2° *Solution*. On pourrait écrire

$$x = \sqrt{61a^2} = \sqrt{45a^2 + 16a^2},$$

on ferait $45a^2 = y^2$, d'où $y = \sqrt{9a \times 5a}$, (738)

et l'on aurait $x = \sqrt{y^2 + (4a)^2}$. (741)

3° *Solution*. En remarquant que $61 = 36 + 25$, on aura une construction encore plus simple, puisque l'on pourra écrire de suite

$$x = \sqrt{61a^2} = \sqrt{36a^2 + 25a^2} = \sqrt{(6a)^2 + (5a)^2}.$$

IX.

754. **Côtés d'angles droits**. *Lorsque, sous un radical du second degré, on aura un nombre quelconque de termes du second degré, si un seul, ou plusieurs de ces termes sont précédés du signe —, la formule exprimera un côté d'angle droit.*

Construction. Soit, par exemple, la formule

$$x = \sqrt{ab - cd};$$

on fera $ab = y^2; \quad cd = z^2,$

d'où $y = \sqrt{ab}; \quad z = \sqrt{cd},$ (738)

et l'on aura $x = \sqrt{y^2 - z^2}.$ (744)

2e Exemple. Construire la formule

$$x = \sqrt{a^2 - bc + \frac{pqh}{m}}.$$

On fera $bc = y^2; \quad \frac{pqh}{m} = y'^2,$

d'où $y = \sqrt{bc}; \quad y' = \sqrt{p \times \frac{qh}{m}},$ (738)

et l'on aura $x = \sqrt{a^2 - y^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 + y'^2 - y^2};$

on fera $a^2 + y'^2 = z^2$, d'où $z = \sqrt{a^2 + y'^2},$ (741)

et l'on aura $x = \sqrt{z^2 - y^2}.$ (744)

On peut aussi écrire $x = \sqrt{(z+y)(z-y)}.$ (702)

Dans ce cas, l'inconnue serait une moyenne proportionnelle.

3e Exemple. Construire la formule

$$x = \sqrt{a^2 - cd - b^2 - ch}.$$

On écrira

$x = \sqrt{(a^2 - b^2) - c\,(d+h)} = \sqrt{(a+b)(a-b) - c\,(d+h)};$

on fera $(a+b)(a-b) = y^2; \quad c(d+h) = z^2,$

d'où $y = \sqrt{(a+b)(a-b)}; \quad z = \sqrt{c\,(d+h)}$ (738)

et l'on aura $x = \sqrt{y^2 - z^2}$ (744)

4e Exemple. La formule $x = \sqrt{61\,a^2}$ que nous avons considérée successivement, comme *moyenne proportionnelle* et comme *hypoténuse*, peut être également construite comme *côté d'angle droit*.

Il suffit pour cela d'écrire $x = \sqrt{61a^2} = \sqrt{64a^2 - 3a^2}$.
Après quoi, on fera

$$3a^2 = y^2, \text{ d'où } y = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \times a}, \quad (738)$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{64a^2 - 3a^2} = \sqrt{64a^2 - y^2} = \sqrt{(8a)^2 - y^2} \quad (744).$$

X.

755. **Corollaire** I. *On peut remplacer un polynôme quelconque, par un monôme décomposable en facteurs du premier degré. Soit par exemple le trinôme*

$$a^5 + b^3cd + p^2hm^2,$$

on fera $\quad b^3cd = a^4y; \quad p^2hm^2 = a^4y',$

d'où $$y = \frac{b^3cd}{a^4}; \quad y' = \frac{p^2hm^2}{a^4}, \quad (750)$$

et l'on aura $a^5 + b^3cd + p^2hm^2 = a^5 + a^4y + a^4y' =$
$= a^4(a + y + y')$.

On fera $\quad a + y + y' = z,$

et l'on aura $a^5 + b^3cd + phm^2 = a^4z = aaaaz$.

756. **Cor.** II. Le problème que nous venons de résoudre permet de ramener à deux cas principaux, toutes les constructions précédentes.

1° *Lorsque la formule ne contient pas de radicaux, on peut la considérer à volonté comme une somme et différence de lignes, ou comme une quatrième proportionnelle.*

2° *Lorsque l'inconnue est exprimée par un radical du second degré, on peut lui donner la forme de moyenne proportionnelle, d'hypoténuse ou de côté d'angle droit.*

1er **Cas.** Supposons qu'il s'agisse de construire la formule

$$x = \frac{a^4 + b^2cd + d^3h}{p^3 + q^3}.$$

1re *Solution.* On fera $q^3 = p^2y$; d'où $y = \frac{q^3}{p^2}$, (750)

et l'on aura $x = \frac{a^4 + b^2cd + d^3h}{p^3 + p^2y} = \frac{a^4 + b^2cd + d^3h}{p^2(p+y)}$;

on fera $p + y = y'$, (748)

et l'on aura $x = \frac{a^4 + b^2cd + d^3h}{p^2y'}$

on fera $a^4 = p^2y'z$; $b^2cd = p^2y'z'$; $d^3h = p^2y'z''$,

d'où $z = \frac{a^4}{p^2y'}$; $z' = \frac{b^2cd}{p^2y'}$; $z'' = \frac{d^3h}{p^2y'}$, (750)

et par conséquent

$$x = \frac{p^2y'z + p^2y'z' + p^2y'z''}{p^2y'} = z + z' + z''. \quad (748)$$

2° *Solution*. Si l'on veut que la formule précédente soit une quatrième proportionnelle, on lui donnera comme ci-dessus, la forme $x = \frac{a^4 + b^2cd + d^3h}{p^2y'}$,

et l'on fera $a^4 = p^3z$; $b^2cd = p^3z'$; $d^3h = p^3z''$,

d'où $z = \frac{a^4}{p^3}$; $z' = \frac{b^2cd}{p^3}$; $z'' = \frac{d^3h}{p^3}$, (750)

ce qui donne $x = \frac{p^3z + p^3z' + p^3z''}{p^2y'} = \frac{p(z + z' + z'')}{y}$,

on fera $(z + z' + z'') = u$, (748)

d'où $x = \frac{pu}{y}$. (733)

2° Cas. Supposons actuellement la formule

$$x = \sqrt{\frac{a^3 + b^3cd + d^4h}{p^3 + q^3}}.$$

1re *Solution*. En opérant comme précédemment, on remplacera le dénominateur binôme $p^3 + q^3$ par le monôme p^2y', et l'on aura $x = \sqrt{\frac{a^5 + b^3cd + d^4h}{p^2y'}}$;

on fera $a^5 = p^3y'z$; $b^3cd = p^3y'z'$; $d^4h = p^3y'z''$,

d'où $$z = \frac{a^5}{p^3y'};\ z' = \frac{b^3cd}{p^3y'};\ z'' = \frac{d^4h}{p^3y'}. \qquad (750)$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{p^3y'z + p^3y'z' + p^3y'z''}{p^2y'}} = \sqrt{p(z + z' + z'')};$$

enfin on fera $$(z + z' + z'') = u, \qquad (748)$$

d'où $$x = \sqrt{pu}. \qquad (738)$$

2ᵉ *Solntion*. Si l'on veut que l'inconnue soit une hypoténuse, on reprendra la formule

$$x = \sqrt{p(z + z' + z'')}.$$

On effectuera le produit des deux facteurs qui sont sous le radical, ce qui donnera

$$x = \sqrt{pz + pz' + pz''};$$

on fera $$pz = u^2;\ pz' = u'^2;\ pz'' = u''^2,$$

d'où $$u = \sqrt{pz};\ u' = \sqrt{pz'};\ u'' = \sqrt{pz''}, \qquad (738)$$

et l'on aura $$x = \sqrt{u^2 + u'^2 + u''^2};$$

on fera $$u^2 + u'^2 = m^2;\ \text{d'où}\ m = \sqrt{u^2 + u'^2}, \qquad (740)$$

et l'on aura $$x = \sqrt{m^2 + u''^2}. \qquad (740)$$

3ᵉ *Solution*. Enfin si l'on veut que l'inconnue soit un côté d'angle droit, on reprendra la formule

$$x = \sqrt{m^2 + u''^2},$$

et l'on ajoutera sous le radical $+y^2 - y^2$, ce qui donnera $$x = \sqrt{m^2 + u''^2 + y^2 - y^2}.$$

La quantité y étant indéterminée, on peut supposer

$$y^2 = 2mu'',$$

d'où $$y = \sqrt{2mu''} = \sqrt{m \times 2u''}; \qquad (748)$$

alors on obtient

$$x = \sqrt{m^2 + u''^2 + 2mu'' - y^2} = \sqrt{(m + u'')^2 - y^2} \qquad (744)$$

757. Les exercices précédents doivent être considérés

comme une préparation utile à l'emploi du langage algébrique.

Le lecteur fera bien de construire ces formules, afin de vérifier l'exactitude des transformations ; ce travail, le rendra habile à reconnaître, parmi toutes les formes que l'on peut donner à l'inconnue, celle qui conduit aux opérations les plus simples.

Avant de passer aux applications nous devons indiquer encore quelques formules dont la construction pourrait arrêter un instant.

XI.

758. **Radicaux**. *Construire la formule*

$$x = a\sqrt{3}.$$

Solution. On fera rentrer le facteur a sous le radical, et l'on aura $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \times a}$. (738)

2° **Exemple**. Pour construire la formule $x = \dfrac{ab\sqrt{2}}{c}$,

on écrira $x = \dfrac{a\sqrt{2b^2}}{c}$; on fera $\sqrt{2b^2} = y$; d'où $y = \sqrt{2b \times b}$, puis on aura $x = \dfrac{ay}{c}$. (733)

3° **Exemple**. Pour construire $x = (a + b)\sqrt{5}$, on écrira $x = \sqrt{5(a + b)^2}$, on fera $a + b = y$, et l'on aura

$$x = \sqrt{5y^2} = \sqrt{5y \times y}. \quad (738)$$

759. En général, *pour construire un radical du second degré, il faut toujours faire en sorte qu'il y ait un terme du second degré sous le radical.*

4e Exemple. *Construire la formule*

$$x = \sqrt[4]{abcd}.$$

Solution. On fera $ab = y^2$; $cd = z^2$;

d'où $y = \sqrt{ab}$; $z = \sqrt{cd}$, (738)

et l'on aura $x = \sqrt[4]{y^2 z^2} = \sqrt{yz}$. (738)

5e Exemple. Construire la formule

$$x = a\sqrt[4]{3}.$$

On écrira $x = \sqrt[4]{3a^4} = \sqrt[4]{a^2 \times 3a^2}$; (738)

on fera $3a^2 = y^2$; d'où $y = \sqrt{3a \times a}$, (738)

et l'on aura $x = \sqrt[4]{a^2 y^2} = \sqrt{ay}$.

6e Exemple. Construire la formule

$$x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}},$$

On écrira $x = \sqrt[4]{\frac{a^4}{3}} = \sqrt[4]{a^2 \times \frac{a^2}{3}}$;

on fera $\frac{a^2}{3} = y^2$; d'où $y = \sqrt{a \times \frac{a}{3}}$, (738)

et l'on aura $x = \sqrt[4]{a^2 y^2} = \sqrt{ay}$. (738)

760. Nous verrons, ailleurs, comment on pourrait construire avec le compas les radicaux de tous les degrés.

Problèmes.

XII.

761. **Problème**. *Construire un quarré double d'un autre quarré donné.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 19. Si nous exprimons par a le côté AB du quarré donné, et par x le côté AD' du quarré cherché, nous aurons évidemment $x^2 = 2a^2$,

d'où $$x = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2a \times a}. \qquad (738)$$

Construction. On fera AC = 2AB ; on décrira la demi-circonférence ADC ; on prolongera le côté KB jusqu'en D, et la corde AD sera le côté du quarré demandé, AD'OH. En effet, on aura (426) AB : AD :: AD : AC ; d'où $\overline{AD}^2 = AB \times AC = AB \times 2AB = 2\overline{AB}^2$.

762. **Corollaire** I. Si l'on voulait construire un quarré égal à *cinq* fois le quarré donné ; on écrirait $x^2 = 5a^2$

d'où $$x = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5a \times a}. \qquad (738)$$

763. **Cor.** II. Si l'on veut, au contraire, que le quarré demandé soit égal à la cinquième partie du quarré donné,

on écrira $$x^2 = \frac{a^2}{5};$$

d'où $$x = \sqrt{\frac{a^2}{5}} = \sqrt{a \times \frac{a}{5}}. \qquad (738)$$

Ces deux derniers problèmes avaient déjà été résolus aux numéros 684 et 685 ; mais j'ai cru devoir les répéter ici, afin de montrer comment l'algèbre indique les constructions à faire dans chaque cas.

XIII.

764. **Problème.** *Construire un quarré qui surpasse un autre quarré donné, des trois huitièmes de sa valeur.*

Solution. *Fig.* 2. Désignons encore par a le côté AB du quarré donné ; on aura $x^2 = a^2 + \frac{3a^2}{8}$;

d'où $$x = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{8}}. \qquad (753)$$

La valeur de l'inconnue sera une hypoténuse, et si l'on fait $$\frac{3a^2}{8} = y^2,$$

on aura $$y = \sqrt{\frac{3a^2}{8}} = \sqrt{a \times \frac{3a}{8}}, \qquad (738)$$

et par conséquent $$x = \sqrt{a^2 + y^2}. \qquad (740)$$

2° Solution. On peut reprendre l'équation primitive $x^2 = a^2 + \frac{3a^2}{8}$; et faisant disparaître le dénominateur, on obtiendra $$8x^2 = 8a^2 + 3a^2 = 11a^2,$$

d'où $$x^2 = \frac{11a^2}{8},$$

et par conséquent
$$x = \sqrt{\frac{11a^2}{8}} = \sqrt{\frac{11a}{8} \times a}. \qquad (738)$$

Construction. On partagera AB en huit parties égales, et l'on portera trois de ces parties de B en C; on décrira la demi-circonférence ADC; on prolongera KB jusqu'au point D, et la corde AD sera le côté du quarré cherché AD'OH.

On remarquera que la construction que nous venons de faire, est également la conséquence de la formule obtenue dans la solution précédente.

En effet, la droite BD, perpendiculaire sur AC, est moyenne proportionnelle entre les deux segments AB et BC, ce qui donne la proportion
$$a : \text{BD} :: \text{BD} : \frac{3a}{8};$$

d'où $$\overline{\text{BD}}^2 = \frac{3a^2}{8}.$$

Ainsi, BD représente la quantité que nous avions nommée y, et le côté AD étant l'hypoténuse du triangle rectangle ABD, il est évident que l'on aura

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2,$$

ou

$$x^2 = a^2 + \frac{3a^2}{8}.$$

XIV.

765. **Problème**. *Construire un quarré qui soit égal à un autre quarré donné, moins les deux septièmes de sa valeur.*

Solution. *Fig.* 3. Soit $AB = a$ le côté du quarré donné;

on écrira $$x^2 = a^2 - \frac{2a^2}{7},$$

d'où $$x = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{7}}; \qquad (754)$$

on fera $$\frac{2a^2}{7} = y^2;$$

d'où $$y = \sqrt{\frac{2a^2}{7}} = \sqrt{a \times \frac{2a}{7}}; \qquad (738)$$

et l'on aura $$x = \sqrt{a^2 - y^2}. \qquad (743)$$

2e Solution. On reprendra l'équation $x^2 = a^2 - \frac{2a^2}{7}$, et faisant disparaître le diviseur, on aura successivement

$$7x^2 = 7a^2 - 2a^2$$
$$7x^2 = 5a^2$$
$$x^2 = \frac{5a^2}{7};$$

d'où $$x = \sqrt{\frac{5a^2}{7}} = \sqrt{a \times \frac{5a}{7}}. \qquad (738)$$

Construction. On décrira la demi-circonférence ADB; on partagera AB en *sept* parties égales, et par le *cinquième*

point de division on tracera la droite CD perpendiculaire sur AB. La corde AD sera le côté du quarré cherché AD'OH.

On remarquera que la corde BD est égale à la quantité que nous avons nommée y dans la solution précédente.

XV.

766. **Problème**. *Construire un quarré qui soit à un autre quarré comme* m : n.

Solution. *Fig.* 4. Exprimons par a le côté AB du quarré donné, et par x le côté AD' du quarré cherché ; on aura

$$x^2 : a^2 :: m : n,$$

ce qui donne $x = \sqrt{\frac{a^2 m}{n}} = \sqrt{a \times \frac{am}{n}}$;

on fera $\frac{am}{n} = y$, d'où $x = \sqrt{ay}$. (738)

Construction. On fera AI $= n$, AV $= m$; on joindra le point I avec V, et l'on tracera SU parallèle à IV, ce qui donnera AI : AV :: AS : AU,

d'où $n : m :: a :$ AU $= \frac{am}{n} = y$. (733)

On décrira la demi-circonférence ADU, et l'on tracera BD perpendiculaire sur AU.

La corde AB $= \sqrt{\text{AB} \times \text{AU}} = \sqrt{ay}$ sera le côté du quarré cherché.

767. **Corollaire**. On opérera de même pour construire un polygone semblable à un autre polygone donné, lorsque l'on connaîtra le rapport $\frac{m}{n}$ qui doit exister entre ces deux polygones. Ainsi, par exemple, si nous exprimons le polygone demandé par X, et son côté AD' par x, le polygone donné par A, et son côté AB par a, nous aurons encore X : A :: $x^2 : a^2$;

mais on doit avoir $X : A :: m : n$;
on aura donc, à cause du rapport commun,

$$x^2 : a^2 :: m : n.$$

d'où $$x = \sqrt{\frac{a^2m}{n}} = \sqrt{a \times \frac{am}{n}}.$$

Construction. *Fig*. 5. On fera $AI = n$, $AV = m$; on joindra le point I avec V, et l'on tracera SU parallèle à IV, ce qui donnera, comme précédemment, $AU = \frac{am}{n} = y$.

On coustruira AD = *moyenne proportionnelle* entre AB et AU, et l'on n'aura plus qu'à construire sur AD' = AD, un polygone semblable au polygone donné ABKHS.

XVI.

768. **Problème**. *Étant donnés un reectangle*, fig. 6*; un triangle*, fig. 7*; un trapèze*, fig. 8, *et un pentagone régulier*, fig. 9, *on veut construire un quarré équivalent à la somme de ces quatre figures*.

Solution. Exprimons par a la base AB, et par b la hauteur AD du rectangle donné.

Par d la base EF, et par h la hauteur GN du triangle.

Par m et n les deux bases parallèles du trapèze, et par p la hauteur HQ.

Enfin par c le côté VU du pentagone régulier, et par r le rayon du cercle inscrit, on aura (696)

Surfaces: Rectangle $= ab$;

Triangle $= \frac{dh}{2}$;

Trapèze $= \frac{p\,(m+n)}{2}$;

Pentagone $= \frac{5cr}{2}$;

Et si l'on désigne par x le côté du quarré cherché, on aura

$$x^2 = ab + \frac{dh}{2} + \frac{p(m+n)}{2} + \frac{5cr}{2},$$

d'où $$x = \sqrt{ab + \frac{dh}{2} + \frac{p(m+n)}{2} + \frac{5cr}{2}}; \qquad (753)$$

on fera

$$ab = y^2;\ \frac{dh}{2} = y'^2;\ \frac{p(m+n)}{2} = y''^2;\ \frac{5cr}{2} = y'''^2;$$

d'où

$$y = \sqrt{ab};\ y' = \sqrt{\frac{dh}{2}};\ y'' = \sqrt{\frac{p(m+n)}{2}};\ y''' = \sqrt{\frac{5cr}{2}};$$

et l'on aura $x = \sqrt{y^2 + y'^2 + y''^2 + y'''^2}$.

On fera $y^2 + y'^2 = z^2$, d'où $z = \sqrt{y^2 + y'^2}$ (740)

$z^2 + y''^2 = z'^2$, d'où $z' = \sqrt{z^2 + y''^2}$; (740)

enfin $z'^2 + y'''^2 = x^2$, d'où $x = \sqrt{z'^2 + y'''^2}$. (740)

Construction. 1re *Opération. Fig.* 6. On fera $AD' = AD = b$; on décrira la demi-circonférence AKB, et l'on aura

$$AK = \sqrt{ab} = y. \qquad (738)$$

2e *Opération. Fig.* 7. On fera $EM' = \frac{GN}{2} = \frac{h}{2}$; on décrira la demi-circonférence ELF, et l'on aura

$$EL = \sqrt{\frac{dh}{2}} = y'. \qquad (738)$$

3e *Opération. Fig.* 8. On fera $QL = \frac{m+n}{2}$; $QH' = QH = p$; on décrira la demi-circonférence QSL, et l'on aura

$$QS = \sqrt{\frac{p(m+n)}{2}} = y''. \qquad (738)$$

4° *Opération. Fig.* 9. On fera

$$PX = \frac{5VU}{2} = \frac{5c}{2};\ PO' = PO = r;$$

on décrira la demi-circonférence PZX ; et l'on aura

$$PZ = \sqrt{\frac{5cr}{2}} = y'''. \qquad (738)$$

5° *Opération. Fig.* 10. On fera A'K' = AK, on tracera KL' = EL, et perpendiculaire sur A'K'; ce qui donnera

$$A'L' = \sqrt{y^2 + y'^2} = z. \qquad (740)$$

6° *Opération.* On fera L'S' = QS et perpendiculaire sur A'L' ; ce qui donnera

$$A'S' = \sqrt{z^2 + y''^2} = z'.$$

7° *Opération.* On fera S'Z' = PZ, et perpendiculaire sur A'S'; ce qui donnera

$$A'Z' = \sqrt{z'^2 + y'''^2} = x.$$

XVII.

769. **Problème.** *Construire un quarré moyen proportionnel entre deux rectangles donnés.*

Solution. *Fig.* 11. Soit ABDH et ACOK les deux rectangles donnés ; désignons AB par a, AH par b ; nous aurons ab pour la surface du premier rectangle.

Si nous exprimons ensuite AC par c et AK par d, nous aurons cd pour la surface du second rectangle.

Enfin si nous nommons x le côté du quarré cherché, nous aurons la proportion

$$ab : x^2 :: x^2 : cd,$$

d'où $$x^4 = abcd,$$

ce qui donne $$x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{ab \times cd}.$$

On fera $ab = y^2$; $cd = z^2$,

d'où $y = \sqrt{ab}$; $z = \sqrt{cd}$, (738)

et l'on aura $x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{y^2z^2} = \sqrt{yz}$. (738)

Construction. 1re *Opération*. On décrira la demi-circonférence ASB, on rabattra AH en AH', et l'on tracera H'S perpendiculaire sur AB ; ce qui donnera

$$AS = \sqrt{AB \times AH'} = \sqrt{ab} = y.$$

2e *Opération*. On rabattra AK en AK'; on décrira la demi-circonférence AUK', et l'on tracera CU perpendiculaire sur AK'; ce qui donnera

$$AU = \sqrt{AC \times AK'} = \sqrt{cd} = z.$$

3e *Opération*. On rabattra la corde AS en AS' et la corde AU en AU'; on décrira la demi-circonférence S'MU', et la perpendiculaire AM sera le côté du quarré demandé, car on aura évidemment

$$\overline{AM}^2 = AS' \times AU' = AS \times AU = \sqrt{ab} \times \sqrt{cd} = \sqrt{abcd},$$

d'où $\overline{AM}^4 = abcd = x^4$,

et par conséqueut $ab : x^2 :: x^2 : cd$.

770. **Corollaire** I. S'il s'agissait de construire un quarré moyen proportionnel entre deux autres quarrés, la solution serait encore plus simple ; car, en exprimant par a et par b les côtés des deux quarrés donnés on aurait la proportion $a^2 : x^2 :: x^2 : b^2$,

d'où $x^4 = a^2b^2$,

et par conséquent $x = \sqrt[4]{a^2b^2} = \sqrt{ab}$. (738)

771. **Cor.** II. Si l'on demandait un quarré moyen proportionnel entre deux figures quelconques, on commencerait par transformer ces figures en quarrés (667), et la question reviendrait au cas précédent.

XVIII.

772. Problème. *Construire un triangle équilatéral équivalent à un triangle quelconque.*

Solution. *Fig.* 12. Soit ABC le triangle donné, on exprimera la base BC par b, la hauteur AO par h, et l'on aura $\frac{bh}{2}$ pour l'expression de la surface.

Si actuellement nous représentons par x le côté U'C du triangle équilatéral demandé, et par y la hauteur SP de ce triangle, nous aurons $\frac{xy}{2}$ pour l'expression de la surface.

Or, les deux triangles ABC, SU'C devant être équivalents, on aura l'équation

$$\frac{xy}{2}=\frac{bh}{2},$$

d'où

$$xy = bh.$$

Le triangle SCP étant rectangle en P, on aura

$$\overline{SP}^2=\overline{SC}^2-\overline{CP}^2,$$

où

$$y^2 = x^2 - \frac{x^2}{4},$$

et par conséquent la question sera complétement exprimée en algèbre par l'ensemble des deux équations

$$xy = bh,$$

$$y^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}.$$

La seconde équation donne $y=\frac{x\sqrt{3}}{2}$; cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, on obtient

$$x\times\frac{x\sqrt{3}}{2}=bh,$$

qui, étant résolue, donne

$$x=\sqrt{\frac{2bh}{\sqrt{3}}}=\sqrt{b\times\frac{2h}{\sqrt{3}}}.$$

On fera $\frac{2h}{\sqrt{3}}=y,$

d'où $y=\sqrt{\frac{4h^2}{3}}=\sqrt{h\times\frac{4h}{3}},$ (738)

et l'on aura $x=\sqrt{by}.$ (738)

Construction. 1re *Opération.* On tracera CD égale et parallèle à AO et l'on fera $DK=\frac{CD}{3}$, de sorte que CK sera égal à $\frac{4h}{3}$.

2e *Opération.* On décrira la demi-circonférence CHK, et prolongeant la droite AD jusqu'au point H, on aura

$$CH=\sqrt{CD\times CK}=\sqrt{h\times\frac{4h}{3}}=\sqrt{\frac{4h^2}{3}}=\frac{2h}{\sqrt{3}}=y.$$

3e *Opération.* On ramènera CH en CH' sur BC ; on décrira la demi-circonférence CUB, et l'on tracera la perpendiculaire HU, ce qui donnera

$$CU=\sqrt{CB\times CH'}=\sqrt{by}=\sqrt{b\times\frac{2h}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2bh}{\sqrt{3}}}=x.$$

XIX.

773. **Problème.** *Construire un triangle, étant données les trois perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés.*

Solution. Si nous exprimons les côtés par x, y, z, et les perpendiculaires correspondantes par h, h', h'' les trois expressions de la surface seront $\frac{xh}{2}=\frac{yh'}{2}=\frac{zh''}{2}$,

d'où $xh=yh'=zh''.$

On peut déduire de là

$$xh = yh'; \quad xh = zh''.$$

d'où

$$y = \frac{xh}{h'}; \quad z = \frac{xh}{h''}.$$

Ainsi les valeurs des trois côtés seraient x, $\frac{xh}{h'}$, $\frac{xh}{h''}$.

En divisant chacun de ces termes par x et multipliant par h', *on ne changera pas leurs rapports*, et l'on obtiendra h', h et $\frac{hh'}{h''}$ pour les trois côtés d'un triangle *semblable* à celui que l'on cherche.

Par conséquent, après avoir construit un triangle BMU avec les trois droites h', h et $\frac{hh'}{h''}$, il ne restera plus qu'à faire un second triangle ABC semblable au premier; et si nous supposons que BC soit égal à x, il faudra que la hauteur BH soit égale à h.

Construction. *Fig.* 12. 1re *Opération.* On tracera une droite quelconque DS, sur laquelle on portera $DB = h$, et $BU = h'$ *homologue* de x.

2e *Opération.* On tracera la droite UY dirigée comme l'on voudra; on fera $UK = h''$; $UV = h'$; $US = h$; on joindra le point K avec S et l'on tracera VO parallèle à KS. Cette construction donnera UK : UV :: US : UO, ou $h'' : h' :: h :$ UO, par conséquent $UO = \frac{hh'}{h''}$.

3e *Opération.* On construira le triangle MBU, dans lequel $BU = h'$ *homologue* du côté x; $BM = BD = h$; et $MU = UO = \frac{hh'}{h''}$.

4e *Opération.* On prolongera le côté BM jusqu'à ce qu'il rencontre la droite HA parallèle à DS et tangente à l'arc de cercle DHM.

Le point A sera le sommet du triangle cherché, car il est évident qu'en prenant pour base le côté BC $= x$, la hauteur sera BH $=$ BD $= h$.

XX.

774. **Problème**. *Par un point donné sur le côté d'un triangle, construire une droite qui partage la surface en deux parties équivalentes.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 20. Soit D le point donné, il est évident que la question serait résolue, si nous connaissions un second point de la droite demandée. Cherchons, par exemple, le point H, et nommons x la distance de ce point au sommet A, du triangle donné.

Les deux triangles ADH, ABC, ayant un angle égal en A, leurs surfaces sont entre elles comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle (626), ce qui donne la proportion

$$\text{ABC} : \text{ADH} :: \text{AB} \times \text{AC} : \text{AD} \times \text{AH}.$$

Si nous exprimons AB par a, AC par b, AD par c, nous aurons

$$\text{ABC} : \text{ADH} :: ab : cx;$$

mais, pour satisfaire à la question proposée, il faut que le triangle ADH soit la moitié du triangle total; ce qui donne

$$\text{ABC} : \text{ADH} :: 2 : 1.$$

Donc, par suite du rapport commun, on aura

$$2 : 1 :: ab : cx,$$

d'où $\quad 2cx = ab$, et par conséquent $x = \dfrac{ab}{2c}$. (733)

Si l'on ne veut pas sortir du triangle donné, on divisera par 2, chacun des termes de la fraction précédente, et

l'on aura $$x = \frac{a \times \frac{b}{2}}{c}. \qquad (733)$$

Construction. On fera $AO = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$, on joindra le point O avec D, puis on tracera la droite BH parallèle à DO; on aura DH pour la droite demandée; car le parallélisme des droites DO, BH donne évidemment

$$AD : AB :: AO : AH,$$

d'où $$c : a :: \frac{b}{2} : AH,$$

et par conséquent

$$AH = \frac{a \times \frac{b}{2}}{c} = \frac{ab}{2c} = x.$$

775. **Corollaire** I. *Fig.* 2. Si l'on voulait que le triangle donné fût partagé en trois parties équivalentes par deux droites DH, DH′, aboutissant à un même point D, pris sur l'un des côtés, on exprimerait AH par x, et l'on aurait

alors $ABC : ADH :: 3 : 1$;
mais $ABC : ADH :: ab : cx$,
donc $3 : 1 :: ab : cx$,

puis $3cx = ab$; d'où $x = \frac{ab}{3c} = \frac{a \times \frac{b}{3}}{c}$. (733)

Pour déterminer le point H′, on exprimerait AH′ par x', et l'on aurait

$ABC : ADH' :: 3 : 2$;
mais $ABC : ADH' :: ab : cx'$,
donc $3 : 2 :: ab : cx'$, d'où

$3cx' = 2ab$, et par conséquent $x' = \frac{2ab}{3c} = \frac{a \times \frac{2b}{3}}{c}$. (733)

776. **Cor.** II. Si la forme du triangle donné était telle

que la droite DH′ dût couper le côté BC, on chercherait la distance du point d'intersection au point B.

XXI.

777. **Problème**. *Partager un triangle en deux parties équivalentes, par une droite parallèle à la base.*

Solution. Soit donné le triangle ABC, *fig.* 3. On connaît la direction de la droite demandée, il suffira par conséquent de trouver un seul point de cette ligne. Cherchons, par exemple, le point D, et pour déterminer sa position, nous exprimerons par x la distance AD, et par a le côté connu AB.

Pour que le triangle total soit partagé en deux parties équivalentes, il faut que l'on ait la proportion

$$\text{ABC} : \text{ADH} :: 2 : 1.$$

Mais, par le parallélisme des droites BC, DH, les deux triangles ABC, ADH seront semblables, et l'on aura (628)

$$\text{ABC} : \text{ADH} :: a^2 : x^2,$$

donc, à cause du rapport commun, on doit avoir

$$2 : 1 :: a^2 : x^2,$$

d'où

$$2x^2 = a^2,$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2},$$

et par conséquent

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{a \times \frac{a}{2}}. \qquad (738)$$

Construction. On décrira la demi-circonférence AEB, et par le point O, milieu de AB, on tracera la droite OE perpendiculaire sur AB. La corde AE, rabattue en AD, déterminera le point D par lequel on tracera DH parallèle à BC.

778. **Corollaire** I. *Fig.* 4. Si l'on voulait partager le

triangle en cinq parties égales, par des droites parallèles au côté BC, on opérerait de la manière suivante.

Soit DH la première parallèle à partir du sommet, on aura $\quad ABC : ADH :: 5 : 1;$
mais, si nous exprimons la distance AD par x nous aurons

$$ABC : ADH :: a^2 : x^2,$$

Par suite du rapport commun, il viendra

$$5 : 1 :: a^2 : x^2,$$

d'où $\quad x^2 = \frac{a^2}{5}$, et par conséquent

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{5}} = \sqrt{a \times \frac{a}{5}}. \qquad (738)$$

Si D'H' est la seconde parallèle, on aura, en exprimant AD' par x' $\quad ABC : AD'H' :: 5 : 2,$

$$ABC : AD'H' :: a^2 : x'^2;$$

ce qui donnera $\quad 5 : 2 :: a^2 : x'^2,$

d'où $\quad x'^2 = \frac{2a^2}{5},$

et par conséquent

$$x' = \sqrt{\frac{2a^2}{5}} = \sqrt{a \times \frac{2a}{5}}, \qquad (738)$$

En exprimant les distances AD'', AD''' par x'' et x''', on aura, en raisonnant de même,

$$x'' = \sqrt{\frac{3a^2}{5}} = \sqrt{a \times \frac{3a}{5}},$$

et $\quad x''' = \sqrt{\frac{4a^2}{5}} = \sqrt{a \times \frac{4a}{5}}.$

Construction. On décrira la demi-circonférence AE'B, on partagera le côté AB en cinq parties égales, et par chacun des quatre points de division on tracera une perpendiculaire sur AB. Les cordes AE, AE', AE'', AE''' seront les valeurs des quantités cherchées x, x', x'', x'''.

On rabattra ces lignes sur AB, ce qui déterminera les points D, D′, D″, D‴ par chacun desquels on tracera une parallèle au côté BC.

779. **Cor.** II. *Fig.* 5. Si l'on voulait que le triangle fût partagé dans le rapport de m à n, on écrirait la proportion

$$triangle\ \text{ADH} : trapèze\ \text{DHBC} :: m : n,$$

d'où, en composant,

$$(\text{ADH} + \text{DHBC}) : \text{ADH} :: (m+n) : m,$$

et par consequent $\text{ABC} : \text{ADH} :: (m+n) : m;$

mais en exprimant la distance AD par x on aura (628)

$$\text{ABC} : \text{ADH} :: a^2 : x^2,$$

et, par suite du rapport commun,

$$(m+n) : m :: a^2 : x^2,$$

d'où

$$(m+n)x^2 = ma^2$$

$$x^2 = \frac{ma^2}{m+n};$$

enfin

$$x = \sqrt{\frac{ma^2}{m+n}} = \sqrt{a \times \frac{ma}{m+n}}.$$

On fera

$$\frac{ma}{m+n} = y, \quad (734)$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{my}. \quad (738)$$

Construction. On fera $\text{AK} = m$, $\text{KS} = n$, et l'on aura $\text{AS} = m + n$.

On joindra le point B avec S, et l'on tracera la droite KO, parallèle à SB, ce qui donnera la proportion

$$\text{AS} : \text{AK} :: \text{AB} : \text{AO},$$

ou

$$(m+n) : m :: a : \text{AO};$$

donc

$$\text{AO} = \frac{ma}{m+n} = y.$$

On décrira la demi-circonférence AEB, on tracera la perpendiculaire OE, et la corde AE, rabattue en AD, déterminera la parallèle DH.

780. **Cor.** III. Tout ce que nous venons de dire pour le

triangle est applicable aux polygones et aux cercles. Ainsi, par exemple, *fig.* 6, si l'on partage AB en trois parties égales, par les points D et D', et si l'on trace les droites DE, DE' perpendiculaires sur AB; les cordes AE, AE' rabattues sur AB seront les côtés homologues de deux polygones semblables, dont les contours partageront la surface du polygone total en trois parties équivalentes.

781. **Cor.** IV. La même construction, *fig.* 7, servira pour diviser le cercle en parties égales par des cercles concentriques. Ainsi, le rayon AB étant partagé en trois parties égales, les deux cercles qui auront pour rayons AE, AE' partageront la surface totale en trois parties équivalentes.

782. **Cor.** V. Les opérations seront les mêmes pour partager le cercle dans tout autre rapport. Ainsi, par exemple, étant donné, *fig.* 9, le cercle qui a pour rayon AB, on veut décrire un cercle concentrique, et tel que l'espace compris entre les deux circonférences soit égal aux *trois cinquièmes* de la surface du petit cercle.

On exprimera le rayon AB du cercle donné par R, le rayon AE du petit cercle par r, et l'on aura (614)

$$\textit{Surf. cercle } \mathrm{AB} = \pi \mathrm{R}^2.$$
$$\textit{Surf. cercle } \mathrm{AE} = \pi r^2.$$
$$\textit{Surf. couronne } = \pi \mathrm{R}^2 - \pi r.$$

et par conséquent $\pi \mathrm{R}^2 - \pi r^2 = \frac{3}{5}\pi r^2$.

Cette équation étant résolue, donne

$$r = \sqrt{\frac{5\mathrm{R}^2}{8}} = \sqrt{\mathrm{R} \times \frac{5\mathrm{R}}{8}}. \qquad (738)$$

Construction. On partagera le rayon AB en huit parties égales, ct par le cinquième point de division, à partir du centre, on tracera la perpendiculaire DE.

La corde AE sera le rayon du cercle demandé, puisque l'on aura évidemment

$$\overline{AE}^2 = AB \times AD = R \times \frac{5R}{8} = \frac{5R^2}{8}, \qquad \text{d'où}$$

(1) $$\pi\overline{AE}^2 = \frac{5\pi R^2}{8};$$

mais $$\pi\overline{AB}^2 = \pi R^2, \qquad \text{donc}$$

(2) $$\pi\overline{AB}^2 - \pi\overline{AE}^2 = \pi R^2 - \frac{5\pi R^2}{8} = \frac{3\pi R^2}{8}.$$

Divisant l'équation (2) par (1), et réduisant on aura

$$\frac{\pi\overline{AB}^2 - \pi\overline{AE}^2}{\pi\overline{AE}^2} = \frac{3\pi R^2}{8} : \frac{5\pi R^2}{8} = \frac{3}{5};$$

donc $$\pi\overline{AB}^2 - \pi\overline{AE}^2 = \frac{3}{5}\pi\overline{AE}^2.$$

XXII.

783. **Problème**. *Partager la surface d'un trapèze en deux parties équivalentes, par une droite parallèle aux bases.*

Solution. *Fig.* 10. Exprimons la base AB par a, la base CD par b, et la hauteur DS par h; nommons x la droite cherchée H″K, et désignons par y la distance DI de cette droite au point D, nous aurons (602)

$$\textit{Surf. trapèze } CDH''K = \frac{DI\ (H''K + CD)}{2} = \frac{y\,(x+b)}{2}.$$

$$\textit{Surf. trapèze } CDAB = \frac{DS\,(AB + CD)}{2} = \frac{h\,(a+b)}{2}.$$

Mais le premier trapèze doit être égal à la moitié du second; par conséquent on aura

$$\frac{y\,(x+b)}{2} = \frac{h\,(a+b)}{4}, \qquad \text{d'où}$$

(1) $$2y\,(x+b) = h\,(a+b).$$

Les triangles DD'B, DUK étant semblables, on doit avoir la proportion

$$UK : D'B :: DI : DS,$$

et par conséquent

$$(x - b) : (a - b) :: y : h, \qquad \text{d'où}$$

(2) $$h(x - b) = y(a - b).$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par l'équation (2) on obtient $2(x + b)(x - b) = (a + b)(a - b)$,
qui, après toutes réductions, donne

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

On fera $a^2 + b^2 = z^2$, d'où $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, (740)

et l'on aura $x = \sqrt{\frac{z^2}{2}} = \sqrt{z \times \frac{z}{2}}$. (738)

Construction On tracera DD' parallèle à CA, ce qui donnera AD' = CD. On ramènera AD' en AD'' perpendiculairement sur AB, puis on tracera l'hypoténuse D''B. Par cette première opération on aura

$$\overline{D''B}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD''}^2 = a^2 + b^2 = z^2,$$

d'où $$D''B = z.$$

On décrira la demi-circonférence BHD'', et par le centre on tracera la droite OH perpendiculaire sur BD'', ce qui donnera

$$BH = \sqrt{BD'' \times BO} = \sqrt{z \times \frac{z}{2}} = \sqrt{\frac{z^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = x.$$

On ramènera BH en BH', et l'on tracera H'H'' parallèle à BD; cette dernière opération déterminera le point H'', par lequel on tracera la parallèle H''K = H'B = HB = x.

784. **Corollaire.** Si la droite H'H'' rencontrait CA trop obliquement, on résoudrait l'équation (2) par rapport à y, ce qui donnerait $y = \dfrac{h(x - b)}{a - b}$,

que l'on pourrait facilement construire, puisque l'on connaît x par la formule précédente.

XXIII.

785. **Problème.** *Construire un parallélogramme, connaissant les côtés adjacents et la différence des deux diagonales.*

Solution. *Fig.* 11. Exprimons par a et par b les deux côtés donnés, par $2x$ la plus grande des deux diagonales; la plus petite par $2y$, et nommons $2d$ la différence de ces lignes. Nous aurons par le théorème du numéro 724

$$4x^2 + 4y^2 = 2a^2 + 2b^2, \quad \text{d'où}$$

(1) $$2x^2 + 2y^2 = a^2 + b^2;$$

mais on a par la question, $2x - 2y = 2d$, qui devient

(2) $$x - y = d.$$

Elevant au quarré, on obtient

(3) $$x^2 + y^2 - 2xy = d^2.$$

Retranchant cette équation de l'équation (1), on a

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + b^2 - d^2.$$

Prenant la racine quarrée

(5) $$x + y = \sqrt{a^2 + b^2 - d^2};$$

ajoutant avec l'équation (2), on a

$$2x = d + \sqrt{a^2 + b^2 - d^2},$$

qui exprime la plus grande des deux diagonales.

Retranchant l'équation (2) de (5), on obtient pour la plus petite diagonale

$$2y = -d + \sqrt{a^2 + b^2 - d^2};$$

on fera $$a^2 + b^2 = z^2,$$

et l'on aura $$2x = d + \sqrt{z^2 - d^2},$$

$$2y = -d + \sqrt{z^2 - d^2}.$$

Construction. Sur les côtés d'un angle droit ABC, on

portera $AB = a$, $BC = b$, on tracera l'hypoténuse AC; ce qui donnera

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2 = z^2.$$

On décrira la demi-circonférence ABC, et, faisant la corde $CU = d$, on aura (682)

$$\overline{AU}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CU}^2 = z^2 - d^2 = a^2 + b^2 - d^2;$$

d'où $$AU = \sqrt{a^2 + b^2 - d^2}.$$

On décrira la demi-circonférence ICS; et l'on aura

$$AS = US + AU = d + \sqrt{a^2 + b^2 - d^2} = 2x,$$

$$AI = -IU + AU = -d + \sqrt{a^2 + b^2 - d^2} = 2y.$$

Ainsi, les deux diagonales seront

$$AS = 2x \quad ; \quad AI = 2y.$$

Une seule de ces lignes suffit, avec les côtés donnés, pour construire le parallélogramme demandé.

On construira d'abord le triangle ABC′, dans lequel un côté $AB = a$, le second côté $BC' = BC = b$, et le troisième côté $AC' = AI = 2y$.

On terminera ensuite le parallélogramme, et les constructions seront exactes, si l'on a $BD = AS = 2x$.

XXIV.

786. **Problème**. *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.*

Solution. *Fig.* 13. Soit $BC = a$ l'hypoténuse donnée; la demi-circonférence BAC devra contenir le sommet de l'angle droit A, de sorte que si l'on connaissait la hauteur SD, le problème serait résolu.

Pour déterminer SD, nous exprimerons cette ligne par h, et la surface du triangle sera par conséquent $\frac{ah}{2}$.

Joignons les trois sommets du triangle ABC avec le centre du cercle inscrit, et nommons r le rayon de ce cercle,

nous aurons $\quad$ *Triangle* $\mathrm{BOC} = \dfrac{ar}{2}$;

on a de plus $\quad$ *tri.* BOI $=$ *tri.* BOH,

tri. COK $=$ *tri.* COH.

Par conséquent

$$\mathrm{BOI} + \mathrm{COK} = \mathrm{BOH} + \mathrm{COH} = \mathrm{BOC} = \frac{ar}{2};$$

Enfin le quarré AKOI $= r^2$; donc, en réunissant toutes les parties, on aura

$$\textit{Surf.}\ \mathrm{BAC} = \mathrm{BOC} + (\mathrm{BOI} + \mathrm{COK}) + \mathrm{AKOI},$$

ou

$$\frac{ah}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + r^2,$$

d'où, après toutes réductions,

(1) $$h = \frac{2r(a+r)}{a}. \qquad (733)$$

Construction. On décrira la demi-circonférence BAC, et l'on tracera la perpendiculaire CU $= 2r$; on prolongera le diamètre BC d'une quantité CD $= r$, et l'on tracera DS perpendiculaire sur CD; on joindra le point B avec le point U par la droite BU, que l'on prolongera jusqu'en S, et l'on aura SD pour la hauteur du triangle demandé.

En effet, le parallélisme des deux droites CU et DS donne

la proportion $\quad$ BC : CU :: BD : DS,

ou $\quad$ $a : 2r :: (a+r) : \mathrm{DS}$;

donc $\quad$ $\mathrm{DS} = \dfrac{2r(a+r)}{a} = h.$

La droite SA, parallèle à BC, déterminera le point A ou A′ pour sommet du triangle.

787. Corollaire I. On peut se proposer de connaître le rapport qui doit exister entre l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit pour que le triangle cherché soit isocèle.

Dans ce cas, *fig.* 12, les trois points A, O, H, seraient en ligne droite, et l'on aurait $AH = AO + OH = \frac{a}{2}$, mais $OH = r$. De plus

$$\overline{AO}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IO}^2 + 2r^2 \text{ ; d'où } AO = r\sqrt{2};$$

donc $$AO + OH = r + r\sqrt{2} = \frac{a}{2};$$

ce qui donne $$r = \frac{a}{2(1+\sqrt{2})}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (1) on

obtiendra $$h = \frac{\frac{a}{(1+\sqrt{2})}\left[a + \frac{a}{2(1+\sqrt{2})}\right]}{a},$$

qui, après toutes réductions, donne

$$h = \frac{a}{2}.$$

788. **Cor.** II. Enfin la question serait impossible, si l'hypoténuse donnée était trop petite, ou que le rayon donné pour le cercle inscrit fût trog grand, et cette impossibilité serait mise en évidence par la construction elle-même, qui donnerait DS plus grand que $\frac{BC}{2}$ ou, ce qui est la même chose, $h > \frac{a}{2}$.

XXV.

789. **Problème.** Fig. 14. *Par deux points donnés* A *et* B, *faire passer une circonférence de cercle qui soit tangente à une droite donnée* MM'.

Solution. Le centre du cercle demandé sera évidemment sur la perpendiculaire OO', menée par le milieu de la corde AB; par conséquent si l'on connaissait le point de

tangence M, on pourrait tracer le rayon OM et le point O serait déterminé.

D'après cela, prolongeons la corde AB jusqu'à sa rencontre avec la droite donnée MM'; désignons la sécante CA par a, la partie extérieure CB par b, et la tangente CM par x. Le corollaire du numéro 432 donnera

$$CA : CM :: CM : CB,$$

ou $$a : x :: x : b.$$

On aura donc $$x^2 = ab,$$

et par conséquent $$x = \sqrt{ab} \quad (738)$$

Construction. On décrira la demi-circonférence ADC, on tracera BD perpendiculaire sur AC. La corde CD sera la valeur de x, car on aura

$$\overline{CD}^2 = CA \times CB = ab,$$

d'où $$CD = \sqrt{ab} = x.$$

La demi-circonférence MDM' déterminera deux points de tangence.

Le premier M appartient au cercle qui a son centre en O; le second point de tangence M' appartient à un second cercle qui a pour centre le point O', et qui satisfait également aux conditions du problème.

XXVI.

790. **Problème**. *Construire une droite tangente à deux cercles donnés.*

Solution. La question dont il s'agit a déjà été résolue aux numéros 330 et 331. Nous avons dit alors comment il fallait opérer; après quoi nous avons démontré l'exactitude des constructions.

Cette manière de résoudre les problèmes laisse quelque chose à désirer, parce qu'elle ne conserve aucune trace

des raisonnements à l'aide desquels on a trouvé la solution.

Voyons si l'algèbre nous sera utile pour atteindre ce but.

Nous admettrons d'abord que l'on sait mener une tangente à un cercle par un point extérieur (285). D'après cela, *fig.* 8, Pl. 20, si nous connaissions le point S, suivant lequel la tangente prolongée rencontre la ligne des centres, il est évident que la question serait résolue.

Nous prendrons donc pour *inconnue* la distance AS, que nous désignerons par x, et nous remarquerons que, dans ce cas, la tangente SH doit être perpendiculaire sur les deux rayons OH, AK, qui, par conséquent, seront parallèles.

Il s'ensuit que les deux triangles SOH, SAK seront semblables, ce qui donnera la proportion

$$SO : SA :: OH : AK.$$

Or, si nous exprimons les rayons OH, AK par R et r, et la distance AO par d, la proportion précédente deviendra $(d + x) : x :: R : r$,

d'où $Rx = r(d + x)$,

qui, étant résolue, donne

$$x = \frac{dr}{R - r}.$$

Cette formule exprime une quatrième proportionnelle que l'on peut obtenir de plusieurs manières, et la construction que nous avons donnée au numéro 330 peut être considérée comme l'une des plus simples; en effet, on a évidemment, *fig.* 2, pl. 8,

$$OM = R - r; \quad AK = r; \quad OA = d,$$

et la similitude des deux triangles MOA, KAS donne la proportion $OM : AK :: OA : AS$,

d'où $(R - r) : r :: d : x$,

et par conséquent $x = \frac{dr}{R - r}$.

Pour construire les tangentes internes, on déterminera le point S', *fig*. 8, pl. 20.

Pour cela, désignons par y la distance AS'; la similitude des triangles ONS', AUS' donnera

$$OS' : AS' :: ON : AU,$$

d'où $(d - y) : y :: R : r$,

et par conséquent $Ry = R(d - y)$,

qui, étant résolue, donne

$$y = \frac{dr}{R + r}.$$

Cette formule conduit à la construction du numéro 331, *fig*. 3, pl. 8, car la similitude des triangles MOA, KAS donne la proportion

$$OM : AK :: AO : AS,$$

d'où $(R + r) : r :: d : y$.

et par conséquent $y = \frac{dr}{R + r}$.

790. **Discussion**. *Fig*. 8, Pl. 20. Il résulte du calcul prédent que

$$AS = x = \frac{dr}{R - r}, \text{ et que } AS' = y = \frac{dr}{R + r}.$$

Si le plus grand des deux cercles augmentait, les dénominateurs $R - r$ et $R + r$ augmenteraient tous les deux, et les valeurs de x et de y diminueraient, d'où il faut conconclure que les deux points S et S' s'approcheraient du point A.

Si au contraire on diminuait le grand cercle, les points S et S' s'éloigneraient.

Des effets analogues auraient lieu si l'on augmentait ou si l'on diminuait le rayon du petit cercle ; mais, la lettre r existant en même temps dans les deux termes des fractions

qui expriment les valeurs de x et de y, la relation que nous venons d'énoncer n'est plus aussi apparente.

Pour mettre cette relation en évidence, on divisera les deux termes de chaque fraction par r, et l'on aura

$$x = \frac{d}{\frac{R}{r} - 1} \quad ; \quad y = \frac{d}{\frac{R}{r} + 1}$$

On reconnait alors que les valeurs de x et de y augmentent ou diminuent lorsque l'on augmente ou lorsqu'on diminue r.

On arriverait aux mêmes résultats en cherchant les distances des points S et S' au centre du grand cercle.

En effet, représentons ces distances par x' et y', nous aurons

$$x' = \text{OS} = \text{OA} + \text{AS} = d + \frac{dr}{R - r} = \frac{dR}{R - r},$$

$$y' = \text{OS}' = \text{OA} - \text{AS}' = d - \frac{dr}{R + r} = \frac{dR}{R + r}.$$

Il résulte de ces formules que si l'on augmente r, la valeur de x' augmentera, que y' diminuera, et que les deux points S et S' s'éloigneront du point A, tandis qu'au contraire, si le rayon r diminue, x' diminuera, y' augmentera, et les points S et S' se rapprocheront du point A.

Si les deux cercles étaient égaux, on aurait $R = r$, ce qui donnerait

$$x = \frac{dr}{r - r} = \frac{dr}{0} \quad ; \quad x' = \frac{dR}{R - R} = \frac{dR}{0},$$

valeurs infinies qui indiquent que les tangentes externes seraient parallèles (70).

On aurait encore

$$y = \frac{dr}{2r} = \frac{d}{2} \quad ; \quad y' = \frac{dR}{2R} = \frac{d}{2},$$

C'est-à-dire que les tangentes internes couperaient la ligne des centres au milieu de AO.

Si le rayon du petit cercle était égal à zéro, on aurait

$$x = \frac{d \times 0}{R - 0} = 0 \quad ; \quad y = \frac{d \times 0}{R + 0} = 0,$$

$$x' = \frac{dR}{R - 0} = d \quad ; \quad y' = \frac{dR}{R + 0} = d.$$

Par conséquent, les tangentes externes se confondraient avec les tangentes internes, et les quatre tangentes passeraient par le point A, que l'on pourrait, dans ce cas, considérer comme un cercle dont le rayon serait égal à *zéro*.

Si les deux cercles donnés se rapprochaient, le facteur d diminuerait, et les points S et S' se rapprocheraient.

Si l'on avait $d = R + r$, on aurait

$$y = \frac{dr}{d} = r \quad ; \quad y' = \frac{dR}{d} = R.$$

Les deux tangentes internes se réduiraient à une seule perpendiculaire à la droite AO.

Si l'on avait

$$d < R + r, \text{ on aurait } \frac{d}{R + r} < 1,$$

d'où $$y < r \quad ; \quad y' < R.$$

Les tangentes internes seraient alors impossibles, car il est évident que le point S' ne peut pas être situé dans l'intérieur des cercles donnés, comme sembleraient l'indiquer les valeurs de y et de y'.

Si l'on avait $d = R - r$, on aurait

$$x = \frac{dr}{d} = r \quad ; \quad x' = \frac{dR}{d} = R,$$

et les deux tangentes externes se réduiraient à une seule perpendiculaire sur la droite AO.

Enfin $d < R - r$ donnerait $\frac{d}{R-r} < 1$,

d'où $x < r$ $x' < R$,

et les tangentes externes seraient impossibles.

XXVII.

791. **Problème.** *Construire un quarré, connaissant l'excès de la diagonale sur le côté.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 21. Exprimons par x le côté AB du quarré demandé, et par a la différence du côté à la diagonale; cette dernière ligne AC sera $x + a$.

Le triangle ABC étant rectangle, on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

qui devient $(x + a)^2 = x^2 + x^2$.

Cette équation résolue donnera

$$x = a \pm \sqrt{2a^2}.$$

Négligeons pour un moment la valeur négative, et nommons x' celle que l'on obtient en prenant le radical avec le signe $+$, nous aurons

$$x' = a + \sqrt{2a^2}.$$

Construction. On fera $KH = 2a$; on décrira la demi-circonférence KSH, et l'on tracera le rayon AS perpendiculaire sur KH. Cette première opération donnera

$$HS = \sqrt{KH \times AH} = \sqrt{2a \times a} = \sqrt{2a^2}.$$

Du point H comme centre, on décrira l'arc SB, ce qui donnera

$$AB = AH + HB = AH + HS = a + \sqrt{2a^2} = x'.$$

Ainsi, le quarré ABCD devra satisfaire aux conditions du problème. L'exactitude des opérations sera vérifiée si l'arc BI, décrit du point C comme centre, est tangent à

l'arc IH, car il est évident que $AI = AH = a$, sera la différence entre la diagonale AC et le côté CB ou AB.

792. On peut désirer savoir ce que l'on obtiendrait si l'on prenait le radical avec le signe —; pour le découvrir, exprimons par x'' la seconde valeur de l'inconnue; nous aurons $x'' = a - \sqrt{2a^2} = -(-a + \sqrt{2a^2})$.

La grandeur absolue de cette quantité sera évidemment

$$AB' = B'H - AH = -AH + \dot{H}S = -a + \sqrt{2a^2},$$

et le quarré AB'C'D' satisfera encore à la question; mais d'une manière indirecte. En effet, la valeur absolue de x'' étant précédée du signe —, il s'ensuit que l'on a

$$x'' = -AB',$$

et par conséquent $-x'' = AB'$.

Or, si l'on ajoute AC' de chaque côté, on aura

$$AC' - x'' = AC' + AB' = AC' + C'D' = AC' + C'D'' =$$
$$= AD'' = AK = a.$$

Desorte que, pour le quarré AB'C'D', la quantité donnée a serait la *somme* du côté et de la diagonale, ce qui est conforme au principe de la soustraction algébrique, puisque la valeur *négative* du côté AB' doit prendre le signe + lorsqu'on la *retranche* de la diagonale AC'.

XXVIII.

793. **Problème.** *Construire un rectangle, connaissant sa surface et son périmètre.*

Solution. *Fig.* 2. Exprimons par a le côté PN du quarré équivalent à la surface du rectangle demandé, par b la droite HK égale au périmètre ou contour, par x la base et par y la hauteur de ce rectangle. La surface sera xy, et le contour $2x + 2y$; ce qui donnera les équations

$$xy = a^2,$$
$$(1) \qquad 2x + 2y = b.$$

La première équation donne

$$y=\frac{a^2}{x}.$$

Cette valeur, étant substituée dans la deuxième équation, donne après toutes réductions

$$x=\frac{b}{4}\pm\sqrt{\frac{b^2}{16}-a^2},$$

d'où

$$\begin{cases} x'=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{b^2}{16}-a^2}, \\ x''=\frac{b}{4}-\sqrt{\frac{b^2}{16}-a^2}, \end{cases}$$

Construction. Sur la droite $CB=\frac{b}{2}$, on décrira la demi-circonférence CM'B, on tracera la droite MM' parallèle à CB, et telle que l'on ait $AM'=PM=a$. On aura

$$\overline{AO}^2=\overline{OM'}^2-\overline{AM'}^2=\frac{b^2}{16}-a^2,$$

d'où

$$AO=\sqrt{\frac{b^2}{16}-a^2},$$

et par conséquent

$$AB=BO+AO=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{b^2}{16}-a^2}=x'.$$

On aura de plus

$$AC=CO-AO=\frac{b}{4}-\sqrt{\frac{b^2}{16}-a^2}=x''.$$

Ainsi, les deux segments déterminés sur le diamètre par la perpendiculaire $AM'=a$, sont précisément les deux valeurs de l'inconnue x.

Ces deux quantités, positives toutes les deux, satisfont également aux conditions du problème, et nous devons conclure de là que l'on peut prendre celle que l'on veut pour base du rectangle demandé.

Cela provient de ce que dans un rectangle on peut prendre indifféremment la base pour la hauteur, et réciproquement; ce que l'algèbre nous apprend en nous donnant pour la base deux valeurs différentes; et, quelle que soit celle des deux valeurs de x que l'on adoptera pour la base du rectangle demandé, la seconde valeur de x représentera la hauteur.

Cette dernière relation peut être facilement mise en évidence en substituant les valeurs précédentes dans l'une des deux équations (1), ce qui donnera

$$y = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2},$$

lorsque l'on fera $x = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2}$,

et qui, au contraire, donnera

$$y = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2},$$

lorsque l'on fera $x = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2}$.

On peut vérifier l'exactitude du résultat que nous venons d'obtenir en multipliant l'une des deux valeurs de x par l'autre, ce qui donnera

$$x'x'' = \left(\frac{b}{4} + \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2}\right)\left(\frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2}\right) = a^2,$$

et si l'on fait la somme de x' et de x'', il viendra

$$x' + x'' = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2} + \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{16} - a^2} = \frac{b}{2}.$$

par conséquent $\quad 2x' + 2x'' = b$.

Ainsi la surface du rectangle $x'x'' = a^2$, et le périmètre $= b$, comme cela était exigé par la question.

D'ailleurs, il résulte évidemment de la figure, que

$$x'x'' = AB \times AC = \overline{AM'}^2 = \overline{PM}^2 = a^2.$$

et puisque le diamètre $CB = \frac{b}{2}$, on a

$$2x'+2x''=2.AB+2.AC=2(AB+AC)=2CB=2\times\frac{b}{2}=b.$$

794. La question serait impossible, si l'on avait $\frac{b^2}{16} < a^2$; ou, ce qui est la même chose, $\frac{b}{4} < a$, parce qu'alors le radical deviendrait imaginaire. Ainsi, la plus grande valeur que puisse prendre la surface a^2 du rectangle cherché est celle qui réduirait à *zéro* la quantité qui est sous le radical, et, dans ce cas, les valeurs de x et de y se réduisant à $\frac{b}{4}$, on en conclut que *le quarré est la plus grande surface rectangulaire que l'on puisse renfermer dans un contour donné.*

XXIX.

795. **Problème.** *Construire un rectangle, connaissant sa surface et la différence des côtés adjacents.*

Solution. *Fig.* 3. Exprimons encore par a le côté du quarré PNMS équivalent à la surface du rectangle demandé, par d la différence des côtés adjacents, par x la base, et par y la hauteur, nous aurons

$$xy = a^2,$$
$$x - y = d.$$

Ces deux équations étant résolues, donneront

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}},$$

d'où

$$\begin{cases} x' = \frac{d}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}, \\ x'' = \frac{d}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}. \end{cases}$$

Le radical étant évidemment plus grand que $\frac{d}{2}$, la seconde valeur de x est négative, et la première seule répond directement à la question.

Si on la substitue dans l'une des deux équations primitives, on aura

$$y' = -\frac{d}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

La seconde valeur donnerait

$$y'' = -\frac{d}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

On aura donc pour les dimensions du rectangle demandé

$$\textit{base} \quad x' = \frac{d}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}},$$

$$\textit{hauteur} \quad y' = -\frac{d}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

Si l'on multiplie l'une de ces équations par l'autre, on aura $x'y' = a^2$,

et si l'on retranche la seconde de la première, il viendra

$$x' - y' = d,$$

ce qui vérifie tous les calculs.

Construction. On décrira une circonférence avec le rayon OA égal à $\frac{d}{2}$; on tracera la tangente $AB = PM = a$; on fera passer par le centre, la sécante BD, ce qui donnera

$$\overline{OB}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AO}^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{d^2}{4},$$

d'où $$OB = \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}},$$

par conséquent

$$BD = DO + OB = \frac{d}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}} = x',$$

$$BC = -OC + OB = -\frac{d}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}} = y'.$$

Ainsi, le rectangle demandé sera BC'HD.

Le résultat est encore vérifié par la construction, puisque l'on a (432)

$$x'y' = BD \times BC = \overline{AB}^2 = a^2,$$

et le diamètre du cercle étant égal à d, il s'ensuit que

$$x' - y' = BD - BC = CD = d.$$

La quantité x'' serait la hauteur, et y'' serait la base d'un second rectangle Z égal au premier, mais dont les côtés coïncideraient avec les prolongements de x' et de y', de manière que x'' serait le prolongement de y', et que y'' serait le prolongement de x'.

XXX.

796. **Problème**. *Par un point donné, construire une sécante telle que la partie de cette ligne, comprise dans le cercle, soit égale à une droite donnée.*

Solution. *Fig.* 4. Soit M le point donné, nous tracerons la tangente MS, et si nous supposons que MD''' soit la sécante demandée, nous devrons avoir la proportion (432)

$$MD''' : MS :: MS : MC'''.$$

Exprimons actuellement par a la droite donnée, CD = = C'''D''', par b la tangente MS, et par x la quantité inconnue MC'''. La proportion ci-dessus deviendra

$$(x + a) : b :: b : x,$$

ou $$x(x+a)=b^2,$$

équation qui, étant résolue, donne

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}},$$

d'où $$\begin{cases} x'=-\frac{a}{2}+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}, \\ x''=-\frac{a}{2}-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}. \end{cases}$$

Construction. On prolongera le rayon OS d'une quantité SH égale à $\frac{\text{CD}}{2}=\frac{a}{2}$, on tracera la droite MH, et le triangle MSH étant rectangle en S, on aura

$$\overline{\text{MH}}^2=\overline{\text{MS}}^2+\overline{\text{SH}}^2=b^2+\frac{a^2}{4},$$

d'où $$\text{MH}=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}.$$

On décrira la demi-circonférence C'SD', et l'on aura

$$\text{MC}'=\text{MH}-\text{C'H}=-\frac{a}{2}+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}=x'.$$

Enfin on décrira l'arc de cercle C'C''C''', et les deux sécantes MD'', MD''' satisferont aux conditions du problème.

Si l'on a bien opéré, les trois points D', D'', D''' doivent être situés sur un même arc de cercle décrit du point M comme centre avec le rayon MD'.

Cela provient de ce que cette dernière quantité est égale à la seconde valeur de x ; en effet, on a

$$x''=-\frac{a}{2}-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}=-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}\right),$$
$$=-(\text{HD}'+\text{MH})=-\text{MD}',$$

et si l'on voulait avoir égard au signe — qui précède cette

dernière quantité, il faudrait ne passer par les points D‴ et D″ qu'après avoir tourné autour du point M, en décrivant l'arc D'D‴D″, en sens contraire de l'arc C'C″C‴.

XXXI.

797. **Problème.** *Partager une droite donnée en deux parties, telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle, entre la ligne entière et la plus petite partie.*

Solution. *Fig.* 5. Soit AB la droite donnée, que nous supposerons partagée au point M, suivant les conditions du problème. Si nous exprimons cette droite AB par a, la plus grande partie AM par x, la plus petite partie BM sera $a - x$, et nous devrons avoir la proportion

$$a : x :: x : (a - x),$$

ou

$$x^2 = a(a - x).$$

Cette équation résolue donnera

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

d'où

$$\begin{cases} x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, \\ x'' = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}. \end{cases}$$

Construction. On élèvera sur AB la perpendiculaire $BC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, on joindra le point C avec le point A, et l'on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4},$$

d'où

$$AC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

On décrira la demi-circonférence OBO′, ce qui donnera

$$AO = -CO + AC = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = x'.$$

$$AO' = CO' + AC = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

et par conséquent

$$-AO' = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right) = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = x''.$$

La quantité positive AO, rabattue en AM, satisfait seule à la question d'une manière *directe*, et donne la proportion AB : AM :: AM : BM.

798. Quant à la droite AO′, elle représente la valeur absolue de x'', mais le signe — qui précède l'expression de cette quantité, indique qu'elle doit être rabattue en AM′, à gauche du point A, ce qui fournit une solution *indirecte* du problème, en conduisant à la proportion

AB : AM′ :: AM′ : BM′.

799. **Remarque**. Les doubles solutions obtenues ainsi par l'algèbre proviennent de ce que souvent, l'équation primitive est plus générale que la question proposée; ainsi, dans l'exemple que nous venons de résoudre, si l'on avait voulu poser la question dans toute sa généralité, il n'aurait pas fallu employer le mot *partager*, qui ne convient qu'à la première solution; mais il aurait fallu *déterminer sur la droite infinie, qui contient deux points donnés* A *et* B, *un troisième point* M, *tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la distance* AB.

La question posée de cette manière aurait admis sans aucune modification les deux réponses fournies par l'équation primitive.

800. **Corollaire** I. Le lecteur aura sans doute reconnu

ici, le problème que nous avions déjà résolu au numéro 446 et qui nous a servi plus tard (447) pour déterminer le côté du décagone régulier inscrit dans un cercle. Par conséquent, si nous exprimons par R le rayon d'un cercle donné, le côté du décagone régulier inscrit aura pour expression

algébrique $$x' = -\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}.$$

Il ne faut pas oublier cette formule, que nous retrouverons ailleurs, et qui exprime *le plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême raison.*

801. Si dans la formule qui exprime x'', on remplace a par R, on aura

$$x'' = -\frac{R}{2} - \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = -\left(\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}\right),$$

et la valeur absolue de cette quantité sera la corde qui sous-tend les *trois dixièmes* de la circonférence.

Ce que l'on pourra facilement démontrer par un raisonnement analogue à celui du numéro 447.

XXXII.

802. **Problème**. *Construire un décagone régulier dont on connaît le côté* AB = d.

Solution. *Fig*. 6. Si nous exprimons le rayon du cercle circonscrit par R, nous aurons (447)

$$R : d :: d : (R - d),$$

d'où $$R(R - d) = d^2.$$

Cette équation, résolue par rapport à R, nous donnera

$$R = \frac{d}{2} \pm \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}},$$

d'où $$R' = \frac{d}{2} + \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}},$$

$$R'' = \frac{d}{2} - \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

Construction. A l'une des extrémités de AB, on élèvera la perpendiculaire $BO = \frac{AB}{2} = \frac{d}{2}$, on tracera l'hypoténuse AO, ce qui donnera

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = d^2 + \frac{d^2}{4},$$

d'où
$$AO = \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}},$$

Du point O comme centre, avec un rayon $OB = \frac{d}{2}$, on décrira l'arc de cercle BC, et l'on aura

$$AC = OC + AO = \frac{d}{2} + \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}} = R'.$$

L'arc CC', décrit du point A comme centre, déterminera le point C', qui est le centre du cercle circonscrit au décagone régulier, qui a pour côté AB.

Si l'on décrit l'arc BK, on aura

$$AK = -OK + AO = -\frac{d}{2} + \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}} =$$

$$= -\left(\frac{d}{2} - \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}}\right) = -R',$$

d'où
$$R'' = -AK.$$

Ainsi AK est la valeur absolue de R''.

803. La droite AK' = AK sera le rayon d'un cercle, dans lequel la corde AB sous-tendrait un arc égal aux *trois dixièmes* de la circonférence.

XXXIII.

804. **Problème**. *Fig.* 7. *Etant donné un cercle de rayon* AB, *on veut décrire avec le même centre, un second*

cercle d'un rayon tel que l'espace compris entre les deux circonférences soit moyen proportionnel entre le premier cercle et le second.

Solution. Exprimons par R le rayon AB du cercle donné, par r le rayon AD du cercle cherché, nous aurons

$$\textit{Surface cercle } AB = \pi R^2,$$
$$\textit{Surface cercle } AD = \pi r^2,$$
$$\textit{Surface couronne } = \pi R^2 - \pi r^2.$$

Les conditions du problème donneront la proportion

$$\pi R^2 : (\pi R^2 - \pi r^2) :: (\pi R^2 - \pi r^2) : \pi r^2,$$

d'où
$$\pi^2 R^2 r^2 = (\pi R^2 - \pi r^2)^2.$$

Extrayant la racine, et divisant par π, on obtient

$$Rr = R^2 - r^2,$$

équation qui, étant résolue, donne

$$r = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}},$$

d'où
$$\begin{cases} r' = -\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}, \\ r'' = -\frac{R}{2} - \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}. \end{cases}$$

Ces formules, identiques avec celles du numéro 800, nous apprennent que, pour partager la surface d'un cercle en *moyenne et extrême raison*, il suffit de partager le rayon dans le même rapport.

Construction. On fera la tangente $BC = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$;
on tracera l'hypoténuse AC, ce qui donnera

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4},$$

d'où
$$AC = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}},$$

On décrira l'arc de cercle BD, et l'on aura

$$AD = -CD + AC = -\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = r'.$$

Si l'on continue l'arc DB jusqu'en D', on aura

$$AD' = CD' + AC = \frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = r'',$$

et le cercle qui aura pour rayon $r'' = AD'$ satisfera encore à la question, c'est-à-dire que l'on aura

$$\pi\overline{AD'}^2 : \left(\pi\overline{AD'}^2 - \pi\overline{AB}^2\right) :: \left(\pi\overline{AD'}^2 - \pi\overline{AB}^2\right) : \pi\overline{AB}^2.$$

XXXIV.

805. **Problème.** Fig. 9. *Étant donné un cercle de rayon* AB, *on veut décrire un second cercle qui ait le même centre et qui soit moyen proportionnel entre le premier cercle et l'espace compris entre les deux circonférences.*

Solution. Exprimons par R le rayon AB du cercle donné, par r le rayon AD du cercle cherché, nous aurons

Surface cercle $AB = \pi R^2$,
Surface cercle $AD = \pi r^2$,
Surface couronne $= \pi R^2 - \pi r^2$.

Les conditions du problème donneront la proportion

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: \pi r^2 : (\pi R^2 - \pi r^2).$$

Divisant par π, on obtient

$$R^2 : r^2 :: r^2 : (R^2 - r^2),$$

d'où
$$R^2 (R^2 - r^2) = r^4,$$

équation qui devient successivement

$$r^4 = R^2 (R^2 - r^2),$$
$$r^4 = R^4 - R^2 r^2,$$
$$r^4 + R^2 r^2 = R^4.$$

Si l'on fait $r^2 = x$, on aura $r^4 = x^2$, et l'équation précédente devient $x^2 + R^2 x = R^4$,
qui, étant résolue, donne

$$x = -\frac{R^2}{2} \pm \sqrt{R^4 + \frac{R^4}{4}}.$$

Remplaçant x par r^2, on a

$$r^2 = -\frac{R^2}{2} \pm \sqrt{R^4 + \frac{R^4}{4}}.$$

Prenant la racine de chaque côté, on a

$$r = \pm\sqrt{-\frac{R^2}{2} \pm \sqrt{R^4 \pm \frac{R^4}{4}}},$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} r' &= +\sqrt{-\frac{R^2}{2} + \sqrt{R^4 + \frac{R^4}{4}}},\\ r'' &= +\sqrt{-\frac{R^2}{2} - \sqrt{R^4 + \frac{R^4}{4}}},\\ r''' &= -\sqrt{-\frac{R^2}{2} + \sqrt{R^4 + \frac{R^4}{4}}},\\ r^{\text{IV}} &= -\sqrt{-\frac{R^2}{2} - \sqrt{R^4 + \frac{R^4}{4}}}. \end{aligned}\right.$$

806. Les deux valeurs r'' et r^{IV} sont *imaginaires*, et n'ont par conséquent rien à faire ici ; il ne nous reste donc plus qu'à examiner r' et r'''.

807. Parmi toutes les transformations que l'on peut faire, il en est une très-remarquable et qui conduit à une construction extrêmement simple. En effet, on peut évidemment écrire

$$r' = \sqrt{-\frac{R^2}{2} + \sqrt{R^2\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)}} = \sqrt{-\frac{R^2}{2} + R\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}} =$$
$$= \sqrt{R\left(-\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}\right)}.$$

La formule que nous venons d'obtenir, nous permet de considérer r' comme une *moyenne proportionnelle*, et si l'on examine le facteur binôme qui est compris entre deux crochets sous le radical, on reconnaîtra l'expression algébrique que nous avions déjà trouvée au numéro 800 pour *le plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême raison*; de sorte que si nous exprimons ce facteur par y, nous aurons $\quad r' = \sqrt{Ry}$. (738)

Construction. On fera la tangente $BC = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$, on tracera l'hypoténuse AC, ce qui donnera

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4},$$

d'où

$$AC = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}.$$

Du point C comme centre on décrira l'arc de cercle BH, et l'on aura

$$AH = -CH + AC = -\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = y.$$

On rabattra AH en AO, on élèvera OD perpendiculaire sur AB, et l'on décrira la demi-circonférence ADB, ce qui déterminera le point D. Enfin on tracera la corde AD, ce qui donnera

$$AD = \sqrt{AB \times AO} = \sqrt{Ry} = \sqrt{R\left(-\frac{R}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}\right)} = r'.$$

Ainsi le cercle qui a pour rayon AD satisfera aux conditions du problème.

808. Le valeur absolue de r''' étant égale à celle de r', la construction sera la même et conduira au même résultat; le signe — qui précède cette valeur indiquant seulement un renversement dans la construction, que l'on peut faire

à gauche du point A, au lieu de la faire à droite, ce qui donne pour résultat AD' au lieu de AD.

XXXV.

809. **Problème**. Fig. 8. *Le rectangle* ABCD *étant donné, on veut déterminer sur les côtés, huit points qui soient les sommets d'un octogone équilatéral.*

Solution. Nous exprimerons le côté AB par $2a$, le côté AD par $2b$, et nous nommerons $2x$ le côté MV du polygone demandé. Nous aurons également $MN = 2x$; $NH = 2x$, et par conséquent $AM = AE - EM = a - x$; $AN = AF - FN = b - x$.

Le triangle MAN étant rectangle, on aura

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2,$$

ou

$$(2x)^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2,$$

équation qui, étant résolue, donne

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2};$$

d'où

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{a+b}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2} + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}; \\ x'' = -\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

Construction. Les opérations à faire pour obtenir l'inconnue, peuvent être disposées d'un grand nombre de manières, mais la précaution que nous avons prise d'exprimer les côtés par des multiples de 2, nous permettra de simplifier le travail, en donnant plus de symétrie aux diverses parties de la figure.

1re *Opération*. Après avoir déterminé le point O, centre du rectangle donné, on tracera la droite OD, que l'on par-

tagera au point I en deux parties égales. On rabattra KI en KI' et l'on aura évidemment

$$OI' = OK + KI' = OK + KI = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

2° *Opération.* On tracera la droite OC, et l'on aura

$$\overline{OC}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PC}^2 = a^2 + b^2.$$

3° *Opération.* On décrira la demi-circonférence OSC, et par le point U, milieu de OC, on élèvera la perpendiculaire US, ce qui donnera

$$\overline{OS}^2 = OC \times OU = OC \times \frac{OC}{2} = \frac{\overline{OC}^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

4° *Opération.* On ramènera OS en OS', perpendiculaire sur OI'; on fera S'I'' égale et parallèle à OI', et l'on tracera OI'', ce qui donnera

$$\overline{OI''}^2 = \overline{OS'}^2 + \overline{S'I''}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OI'}^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

d'où $$OI'' = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2};$$

5° *Opération.* On ramènera I''S' en I''S'', et l'on aura

$$OS'' = -S''I'' + OI'' = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = x'.$$

6° *Opération.* On décrira la circonférence qui a pour rayon OS'', et l'on tracera quatre tangentes parallèles aux côtés du rectangle donné. Les points de rencontre de ces tangentes avec les côtés du rectangle, seront les sommets de l'octogone demandé.

810. **Remarque.** Quelque composée que paraisse la construction précédente, il est cependant facile de reconnaître que chaque opération particulière est écrite dans la formule, et qu'il a suffi de faire en quelque sorte une traduction mot à mot, pour arriver au résultat.

Le nombre des opérations contribue même à faire mieux

sentir l'utilité du langage algébrique, sans le secours duquel on aurait difficilement reconnu les relations qui existent entre les inconnues et les quantités données.

811. Si l'on continue l'arc de cercle S″S′ jusqu'à ce qu'il coupe le prolongement de la droite OI″, on obtiendra OS‴, qui sera la valeur *absolue* de l'inconnue x''.

En effet, on aura $OS''' = I''S''' + OI'' =$

$$= \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = -x'';$$

par conséquent $x'' = -OS'''$.

Si l'on décrit la circonférence qui a pour rayon OS‴, et que l'on trace comme précédemment quatre tangentes parallèles aux côtés du rectangle donné, les points où les prolongements de ces côtés seront coupés par les tangentes, seront les sommets d'un second octogone *équilatéral*, du genre des polygones que l'on nomme *étoilés*.

En prenant les sommets dans l'ordre indiqué par les chiffres il sera facile de reconnaître l'égalité des côtés.

812. **Discussion**. Si le rectangle donné était un quarré, on aurait $b = a$, et la formule deviendrait

$$x = -\frac{a+a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+a^2}{2} + \left(\frac{a+a}{2}\right)^2},$$

qui, après toutes réductions, donne

$$x = -a \pm \sqrt{2a^2}.$$

La figure 10 contient les opérations qui se rapportent à la première valeur de l'inconnue x.

Un résultat assez curieux est celui que l'on obtiendrait en supposant $a = 3b$.

On aurait alors $x = -2b \pm 3b$,

et la première valeur de x donnerait pour sommets du polygone demandé les points qui partagent les plus grands

côtés en trois parties égales ; ce qui permettrait de considérer le rectangle donné, *fig.* 11, comme un octogone équilatéral, ayant pour sommet les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Si l'on avait $a > 3b$, le polygone demandé aurait des angles rentrants, *fig.* 12.

Enfin, si l'on avait $b = 0$, la formule deviendrait

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{3a^2}}{2}$$

Dans ce cas, le rectangle donné se réduirait à la droite *ac*, *fig.* 13 ; l'octogone correspondant à la valeur positive de l'inconnue serait composé de deux triangles équilatéraux liés entre eux par la droite 8—7——3—4, qui représente deux côtés opposés *réunis* en un seul.

Je laisse au lecteur le soin de construire la seconde valeur de l'inconnue pour chacun des cas particuliers que nous venons d'indiquer.

CHAPITRE III.

Solutions numériques des Problèmes.

I.

813. **Problème.** Fig. 1re, Pl. 22. *Sur une droite* AB, *de* 14 *mètres de longueur, on veut déterminer un point* M, *dont les distances aux points* A *et* B *seraient entre elles comme les nombres* 3 *et* 4.

Solution. Nous exprimerons la distance MA par $3x$; la distance MB par $4x$, et l'équation

$$MA + MB = AB$$

donnera $3x + 4x = 14,$

d'où $x = 2.$

Par conséquent, on aura

$$MA = 3x = 6;\ MB = 4x = 8.$$

814. **Corollaire I.** Il existe sur la même droite et à gauche du point A, un second point M', qui satisfait également aux conditions du problème.

Pour l'obtenir, on fera comme précédemment $M'A = 3x$; $M'B = 4x$; mais alors on aura

$$M'B - M'A = AB,$$

ou $4x - 3x = 14,$

ce qui donne $x = 14,$

et par conséquent

$$M'A = 3 \times 14 = 42;\ M'B = 4 \times 14 = 56.$$

815. **Cor. II.** Les deux solutions précédentes peuvent être considérées comme les réponses à une question plus générale, que l'on aurait pu énoncer de la manière suivante :

Deux points A *et* B *étant éloignés l'un de l'autre de* 14 *metres, on veut déterminer sur la droite* AB *un point* M, *tel que les quarrés des distances* AM *et* BM *soient entre eux comme* 9 : 16.

Solution. Nous représenterons la distance AM par y, et nous aurons par conséquent $BM = 14 - y$.

De plus, pour satisfaire aux conditions du problème, on doit avoir $y^2 : (14 - y)^2 :: 9 : 16,$ d'où

(1) $16y^2 = 9(14 - y)^2.$

Effectuant la multiplication indiquée dans le second membre, et faisant les réductions, on obtient l'équation

(2) $y^2 + 36y = 252,$

qui, étant résolue, donne

$$y = 6(-3 \pm 4),$$

d'où $\begin{cases} y' = 6(-3 + 4) = 6, \\ y'' = 6(-3 - 4) = -42. \end{cases}$

La valeur de y' donne le point M à 6 mètres du point A et à 8 mètres du point B, de sorte que l'on a

$$\overline{MA}^2 : \overline{MB}^2 :: (6)^2 : (8)^2 :: 9 : 16,$$

d'où $$MA : MB :: 3 : 4.$$

La valeur de y'' donne le second point M', situé à 42 mètres *à gauche* du point A, par conséquent à 56 mètres *à gauche* du point B, et l'on a encore pour ce deuxième

point $$\overline{M'A}^2 : \overline{M'B}^2 :: (42)^2 : (56)^2 :: 9 : 16,$$

d'où $$M'A : M'B :: 3 : 4.$$

II.

816. **Problème**. Fig. 2. *Le point* B *est élevé de* 120 *mètres au-dessus d'une ligne horizontale* BQ; *le point* C *est élevé de* 90 *mètres au-dessus de la même ligne, les deux verticales* BP, CQ *sont éloignées l'une de l'autre de* 60 *mètres; on demande la longueur de la droite* BC.

Solution. Si l'on trace la droite CA parallèle à QP, le triangle BAC sera rectangle en A, ce qui donnera

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2;$$

mais on a AC = PQ = 60 *mètres*; AP = CQ = 90 *mètres*; de plus, BA = BP — AP = 120 — 90 = 30 *mètres*, et si nous exprimons BC par x, l'équation précédente devient

$$x^2 = (30)^2 + (60)^2 = 900 + 3600 = 4500,$$

$$\text{d'où } x = \sqrt{4500} = 30\sqrt{5} = 67^{m},08.$$

Calcul. Il y a trois manières d'obtenir le résultat :

1° On extraira la racine quarrée du nombre 4500.

2° On extraira la racine de 5, puis, on multipliera le résultat par 30; mais dans ce cas il faudra continuer l'extraction jusqu'au deuxième chiffre au delà de celui qui exprime la limite d'exactitude exigée par la question (*algèbre*).

3° On pourra faire usage des logarithmes, ce qui donnera

$$\log.\, x = \frac{\log.\, 4500}{2}.$$

III.

817. **Problème**. Fig. 3. *Le triangle* BAC *est rectangle en* A, *on sait de plus que le côté* AC $= 30$ *mètres, et que l'hypoténuse* BC $= 40$ *mètres. Il s'agit de calculer la surface.*

Solution. Si nous prenons pour base du triangle le côté AC, la hauteur sera AB, que nous désignerons par x, et si nous exprimons la surface demandée par S, nous aurons (600)

$$(1) \qquad S = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{30x}{2} = 15x.$$

Mais le triangle donné étant rectangle, on aura

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2, \qquad \text{d'où}$$

$$(2) \qquad x^2 = (40)^2 - (30)^2 = 1600 - 900 = 700.$$

Prenant la racine quarrée, on obtient

$$x = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}.$$

qui, étant substituée dans l'équation (1), donne

$$S = 15 \times 10\sqrt{7} = 150\sqrt{7} = 396^{mq},86.$$

2° Solution. *Fig.* 4. Si quelque motif engageait à prendre l'hypoténuse BC pour la base du triangle, on tracerait la hauteur AD, que l'on exprimerait par h, et l'on aurait alors

$$(1) \qquad S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{40h}{2} = 20h.$$

Mais le triangle ADC étant rectangle en D, on aura l'équation

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2,$$

qui devient, en exprimant par x la distance CD,

(2) $$h^2 = (30)^2 - x^2.$$

Enfin le corollaire du numéro 427 donnera

$$CD : CA :: CA : CB,$$

ou $$x : 30 :: 30 : 40,$$

et par conséquent $x = \frac{900}{40} = \frac{45}{2}$.

Cette valeur étant substituée dans l'équation (2), on obtient $$h^2 = (30)^2 - \left(\frac{45}{2}\right)^2,$$

d'où $$h = \frac{15\sqrt{7}}{2},$$

qui, reportée dans l'équation (1), donne

$$S = 20 \times \frac{15\sqrt{7}}{2} = 150\sqrt{7} = 396^{mq},86$$

Cette seconde solution est évidemment plus longue que la première. Aussi ne l'ai-je donnée que comme exercice, et pour faire voir comment on est toujours ramené au résultat, quelle que soit la route parcourue ; il faut cependant conclure de ce qui précède, que le choix des inconnues n'est pas indifférent, et l'on devra s'exercer à découvrir, parmi les différents moyens de résoudre un problème, celui qui conduit le plus promptement à la solution.

IV.

818. **Problème.** Fig. 5. *La base* BC *d'un triangle isocèle vaut* 15 *mètres*, *et le côté* AB *en vaut* 24. *On demande la surface.*

Solution. En exprimant comme ci-dessus la surface par S et la hauteur AD par h, on aura

$$S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{15h}{2};$$

mais le triangle ABD, rectangle en D, donnera

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2, \qquad \text{d'où}$$

$$(2) \qquad h^2 = (24)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

Cette équation étant résolue, on obtient

$$h = \frac{3\sqrt{231}}{2},$$

qui, substituée dans l'équation (1), donne

$$S = \frac{15 \times 3\sqrt{231}}{2 \times 2} = \frac{45\sqrt{231}}{4} = 170^{mq},98.$$

V.

819. **Problème.** Fig. 6. *La base* BC *d'un triangle isoscèle est au côté oblique* AB *comme* 4 *est à* 7. *Le rayon* OD *du cercle inscrit vaut* 3 *mètres. On demande la surface du triangle.*

Solution. Nous désignerons la base BC par $4x$, le côté oblique par $7x$, et nous aurons exprimé que ces deux lignes sont entre elles comme les nombres 4 et 7.

Le côté BD moitié de la base sera $2x$.

Le rayon OD étant égal à 3 mètres, si nous exprimons la hauteur AD par h, nous aurons $AO = AD - OD = h - 3$,

Le théorème du numéro 376 donne la proportion

$$AO : OD :: AB : BD,$$

qui devient, en adoptant les notations ci-dessus,

$$(h - 3) : 3 :: 7x : 2x : 7 : 2,$$

d'où $$2(h - 3) = 21,$$

et par conséquent $$h = \frac{27}{2}.$$

Mais le triangle ABD étant rectangle en D, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2,$$

ou $$(7x)^2 = h^2 + (2x)^2,$$

qui devient, en remplaçant h par $\frac{27}{2}$,

$$49x^2 = \frac{729}{4} + 4x^2.$$

Cette équation étant résolue, on obtient

$$x = \frac{9\sqrt{5}}{10},$$

donc $$BC = 4x = \frac{4 \times 9\sqrt{5}}{10} = \frac{18\sqrt{5}}{5},$$

ce qui donne pour l'expression de la surface

$$S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{\frac{18\sqrt{5}}{5} \times \frac{27}{2}}{2},$$

d'où, après toutes réductions,

$$S = \frac{243\sqrt{5}}{10} = 54^{mq},33.$$

VI.

820. **Problème.** Fig. 7. *Le côté* BC *d'un triangle équilatéral vaut* 14 *mètres. On demande la surface.*

Solution. Si nous exprimons la hauteur AD par h et la surface par S, nous aurons

(1) $$S = \frac{14h}{2} = 7h.$$

Le triangle ABD, rectangle en D, donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - BD;$$

mais le triangle donné étant équilatéral, on a AB = 14 *mètres*, BD = 7 *mètres*, et l'équation précédente devient

(2) $$h^2 = (14)^2 - (7)^2,$$

d'où $$h = 7\sqrt{3},$$
qui, étant substituée dans l'équation (1), donne
$$S = 49\sqrt{3} = 84^{mq},87.$$

VII.

821. **Problème**. Fig. 8. *Le côté* AB *d'un hexagone régulier vaut* 9 *centimetres. On demande la surface.*

Solution. On sait que l'hexagone régulier se compose de six triangles équilatéraux. Or, en opérant comme pour le problème qui précède, on trouvera pour la surface du triangle ABC, $S = \frac{81\sqrt{3}}{4}$.

Multipliant cette quantité par 6, on aura pour la surface de l'hexagone exprimée en *centimètres quarrés*,
$$S = 6 \times \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2} = 210^{cq},44.$$

822. **Corollaire**. Le problème que nous venons de résoudre est utile dans la pratique de l'architecture.

En effet, on emploie souvent pour former l'aire ou la surface d'un plancher, des *carreaux* ayant la forme d'hexagones réguliers. On peut donc avoir besoin de connaître avant l'exécution, combien il faudra de ces hexagones pour couvrir une surface donnée. Or, il est évident que dans ce cas, il suffira de diviser la surface donnée par le nombre qui exprime la surface d'un carreau.

Ainsi, par exemple, 1 *mètre quarré* étant égal à 10000 *centimètres quarrés* (590), il s'ensuit qu'en divisant le nombre 10000 par $\frac{243\sqrt{3}}{2}$ on obtiendra
$$\frac{20000}{243\sqrt{3}} = \frac{20000\sqrt{3}}{729} = 47,518$$

qui exprime combien de fois 1 mètre quarré contient la surface d'un carreau hexagonal de 9 *centimètres* de côté.

823. Pour abréger les calculs dans la pratique, on composera le tableau suivant :

N	NOMBRE DES CARREAUX.	N	NOMBRE DES CARREAUX.
1	47,518	6	285,108
2	95,036	7	332,626
3	142,554	8	380,144
4	190,072	9	427,662
5	237,590	10	475,180

La colonne N désigne des mètres quarrés, et le nombre à droite, indique combien il faut de carreaux pour couvrir la surface correspondante.

824. On pourrait avoir la pensée, pour former ce tableau, de multiplier successivement 47,518 par 1, 2, 3, etc.

Cette manière de procéder ne vaudrait rien ; tous les tableaux de ce genre doivent être calculés par addition et non par multiplication. En effet, si, pour obtenir le sixième nombre du tableau, j'avais multiplié 47,518 par 6, et que j'eusse fait une erreur, je ne m'en serais pas aperçu, parce qu'il n'en serait resté aucune trace. Mais si chacun des nombres du tableau est formé par l'addition du nombre précédent avec le nombre 47,518, il est évident que si l'on faisait une erreur, elle se reproduirait jusqu'à la fin, et l'on serait averti de sa présence, parce que le dernier nombre ne serait pas, comme ci-dessus, composé des chiffres du premier, avancés d'un rang vers la gauche.

825. L'usage du tableau précédent est extrêmement

simple ; en effet, supposons que l'on veut savoir combien il faudrait de carreaux pour couvrir une surface de 2746 *mètres quarrés,* on aura

Pour 2000^{mq}	=	95036 *carreaux.*
700	=	33263
40	=	1901
6	=	285
Pour 2746	=	130485

Ainsi, pour 2000 mètres quarrés, on prendra le nombre 95,036 qui correspond à 2 mètres quarrés, puis on avancera la virgule de trois rangs vers la droite.

Pour 700 mètres quarrés, on prendra le nombre 332,626, et l'on avancera la virgule de deux rangs, et ainsi de suite.

Il sera facile de composer des tableaux analogues pour toutes les grandeurs de carreaux employés dans la pratique.

VIII.

826. **Problème**. *Fig.* 8. *Le côté* BC *d'un triangle équilatéral vaut* 12 *mètres ; on demande le rayon* OB *du cercle circonscrit.*

Solution. La droite AD, perpendiculaire sur BC, passera par le centre O et par le point S, milieu de l'arc BSC. L'arc BS vaudra par conséquent la sixième partie de la circonférence, et la corde BS sera égale au rayon OB, que nous exprimerons par R (292). Le quadrilatère BOCS sera un losange, et, par le théorème du numéro 724, on aura $\overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{CS}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{BC}^2$,

ou, ce qui revient au même,

$$4R^2 = R^2 + (12)^2,$$

qui devient $$R^2 = \frac{144}{3},$$

d'où $$R = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} = 6^m,93.$$

2e solution. Le quadrilatère BOCS étant un losange, on a $$OD = \frac{OS}{2} = \frac{R}{2};$$

mais le triangle rectangle BOD donnera
$$\overline{BO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{BD}^2, \text{ qui devient}$$
$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (6)^2, \text{ d'où } R = 4\sqrt{3} = 6^m,93.$$

3e solution. OD étant égale à $\frac{R}{2}$, on a
$$AD = AO + OD = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}.$$

De plus, on a $$DS = OD = \frac{R}{2};$$

mais le théorème du numéro 424 donne
$$AD : BD :: BD : DS,$$
qui devient $$\frac{3R}{2} : 6 :: 6 : \frac{R}{2}, \text{ d'où}$$
$$\frac{3R^2}{4} = 36, \text{ ce qui donne } R = 4\sqrt{3} = 6^m,93.$$

4e solution. On a AO = OS = 2OD ; on aura donc
$$AO + OD = 3OD = \frac{3R}{2};$$

mais le triangle rectangle ABD donne
$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2,$$
qui devient
$$\left(\frac{3R}{2}\right)^2 = (12)^2 - (6)^2 = 144 - 36 = 108.$$

Cette équation étant résolue, on aura

$$R = 4\sqrt{3} = 6^{m},93.$$

3ᵉ Solution. Exprimons AD par h ; nous aurons

$$OD = AD - AO = h - R.$$

Mais la droite BO partage l'angle ABD en deux parties égales, ce qui donne, par le théorème du numéro 376,

$$AB : BD :: AO : OD,$$

qui devient $12 : 6 :: R : (h - R)$.

On en conclut $6R = 12(h - R)$, d'où

$$18R = 12h, \text{ et par conséquent } R = \frac{12h}{18} = \frac{2h}{3};$$

mais le triangle rectangle ABD donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2,$$

qui devient

$$h^2 = (12)^2 - (6)^2 = 144 - 36 = 108,$$

d'où $h = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Cette valeur étant substituée dans celle de R, on obtient

$$R = \frac{2 \times 6\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} = 6^{m},93.$$

827. **Corollaire I.** Le rayon OD du cercle inscrit étant exprimé par r, le triangle rectangle BOD donnera

$$\overline{OD}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{BD}^2, \text{ qui devient}$$

$$r^2 = (4\sqrt{3})^2 - (6)^2 = 48 - 36 = 12,$$

et par conséquent $r = 2\sqrt{3} = 3^{m},46$,
ce qui doit être, puisque nous avons reconnu précédemment que

$$OD = \frac{AO}{2} = \frac{AD}{3}.$$

828. **Cor. II.** Si nous exprimons par s la surface du triangle BOC, nous aurons

$$s = \frac{BC \times OD}{2} = \frac{12 \times 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} = 20^{mq},78.$$

Exprimant par S la surface du triangle ABC, nous aurons $S = 3s = 36\sqrt{3} = 62^{mq},35.$

On arriverait au même résultat en opérant comme nous l'avons fait au numéro 820.

IX.

829. **Problème.** *Fig.* 9. *Le côté* BC *d'un dodécagone régulier est égal à* 2 *mètres ; on demande le rayon* AB *du cercle circonscrit.*

Solution. Si nous traçons la droite BO perpendiculaire sur AC, le triangle rectangle ABO donnera

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2;$$

mais BO sera la moitié du côté de l'hexagone régulier, et si nous exprimons AB par R, nous aurons $BO = \frac{R}{2}$.

Enfin, si nous désignons AO par x, l'équation précédente deviendra

$$(1) \qquad R^2 = x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2;$$

le triangle rectangle BOC donne

$$\overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{BC}^2,$$

qui, en exprimant OC par y, devient

$$(2) \qquad \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = (2)^2 = 4.$$

Enfin on a

$$(3) \qquad AO + OC = AC,$$

qui devient $x + y = R$;

de sorte que toutes les conditions du problème sont exprimées par les trois équations

$$(1) \qquad R^2 = x^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

(2) $$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = 4,$$

(3) $$x + y = R.$$

La première équation donne $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;

l'équation (2) donne $y = \sqrt{4 - \frac{R^2}{4}}$;

ces valeurs étant substituées dans l'équation (3) on obtient $$\frac{R\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4 - \frac{R^2}{4}} = R,$$

d'où $$\sqrt{4 - \frac{R^2}{4}} = R - \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

élevant au quarré, on obtient
$$4 - \frac{R^2}{4} = R^2 + \frac{3R^2}{4} - R^2\sqrt{3},$$

qui devient successivement
$$16 - R^2 = 4R^2 + 3R^2 - 4R^2\sqrt{3},$$
$$16 = 8R^2 - 4R^2\sqrt{3},$$
$$R^2 = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}),$$

d'où $R = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6} = 3^m,86.$

Cette dernière transformation provient de ce que

$$2 + \sqrt{3} \text{ est le quarré de } \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

qui vaut $$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

(*Voir en algèbre la formule* $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.)

830. **Corollaire** I. Le triangle rectangle ABD donnera
$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2,$$

AD étant le rayon du cercle inscrit au dodécagone; si nous exprimons cette quantité par r, nous aurons

$$r^2 = R^2 - (1)^2;$$

remplaçant R par sa valeur obtenue précédemment, il vient

$$r^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 1 = 8 + 4\sqrt{3} - 1 = 7 + 4\sqrt{3},$$

d'où $r = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = 3^m,73.$

831. **Cor.** II. Si nous exprimons par s la surface du triangle ABC, nous aurons

$$s = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{2 \times r}{2} = r = 2 + \sqrt{3} = 3^{mq},73.$$

2° Solution. On peut arriver au même résultat sans calculer le rayon du cercle inscrit. En effet, on a

$$AC = R, \text{ et } BO = \frac{R}{2}.$$

Par conséquent, on aura

$$\textit{Surf. } ABC = \frac{AC \times BO}{2},$$

qui devient $s = \dfrac{R \times \dfrac{R}{2}}{2} = \dfrac{R^2}{4};$

remplaçant R^2 par sa valeur trouvée précédemment, on aura

$$s = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4} = 3^{mq},73.$$

832. **Cor.** III. En exprimant par S la surface du dodécagone, on aura

$$S = 12s = 12(2 + \sqrt{3}) = 44^{mq},78.$$

X.

833. **Problème.** Fig. 10. *Le côté* BC *d'un quarré vaut* 30 *mètres; on demande le rayon* AB *du cercle circonscrit.*

Solution. Les deux diagonales BH, CK se coupent à angles droits; il s'ensuit que le triangle BAC est rectangle en A, ce qui donne

$$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2;$$

exprimant BA par R, et remarquant que BA $=$ AC, on obtient $R^2 + R^2 = (30)^2$,

d'où $R = \sqrt{450} = \sqrt{225 \times 2} = 15\sqrt{2} = 21^m,21.$

834. **Corollaire.** La diagonale BH est égale à

$$2 \times AB = 30\sqrt{2} = 42^m,43.$$

XI.

835. **Problème.** Fig. 11. *Le côté* BC *d'un octogone régulier vaut* 12 *mètres; on demande le rayon* AB *du cercle circonscrit.*

Solution. Concevons la droite BO perpendiculaire sur AC; le triangle ABO sera rectangle en O; de sorte que l'on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2;$

de plus, l'angle BAO valant un demi-angle droit, il est évident qu'il doit en être de même de l'angle ABO; donc le triangle ABO est isocèle.

Exprimant le rayon AB par R, et faisant AO $=$ BO $= x$, on obtient

(1) $$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2;$$

mais le triangle BOC étant rectangle en O, nous aurons

$$\overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{BC}^2,$$

qui, en exprimant OC par y, devient

(2) $$x^2 + y^2 = (12)^2 = 144.$$

Enfin on a $$AO + OC = AC,$$ d'où

(3) $$x + y = R.$$

Ainsi la question est complétement exprimée dans le langage algébrique par l'ensemble des équations

(1) $$R^2 = 2x^2,$$

(2) $$x^2 + y^2 = 144,$$

(3) $$x + y = R.$$

La troisième équation donne

$$y = R - x;$$

élevant au quarré, on obtient

$$y^2 = R^2 + x^2 - 2Rx,$$

qui, étant substituée dans l'équation (2), donne

(4) $$2x^2 - 2Rx + R^2 = 144.$$

Mais l'équation (1) donne

$$2x^2 = R^2, \text{ d'où } x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient

$$R^2 - \frac{2R^2}{\sqrt{2}} + R^2 = 144,$$

d'où, après toutes réductions,

$$R = 6\sqrt{2(2+\sqrt{2})} = 15^m,68.$$

836. **Corollaire** I. Pour obtenir le rayon AD du cercle inscrit, on remarquera que le triangle ABD est rectangle en D, ce qui donne $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$,

qui, en exprimant AD par r, devient

$$r^2 = R^2 - (6)^2 = R^2 - 36;$$

remplaçant R par sa valeur trouvée précédemment, on obtient

$$r^2 = 36 \times 2(2 + \sqrt{2}) - 36 = 108 + 72\sqrt{2} =$$
$$= 36(3+2\sqrt{2}),$$

d'où $r = 6\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 6(1+\sqrt{2}) = 14^{m},49.$

Cette dernière transformation provient de ce que

$3+2\sqrt{2}$ est le quarré de $1+\sqrt{2}$.

837. **Cor.** II. Si l'on exprime par s la surface du triangle ABC, on aura

$$s = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{12r}{2} = \frac{12 \times 6(1+\sqrt{2})}{2} =$$
$$= 36(1+\sqrt{2}) = 86^{mq},91.$$

2° Solution. On peut arriver au même résultat en écrivant

$$s = \frac{AC \times BO}{2} = \frac{Rx}{2} = \frac{R \times R}{2\sqrt{2}} = \frac{R^2}{2\sqrt{2}};$$

remplaçant R par sa valeur, on a

$$s = \frac{36 \times 2(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = 36(1+\sqrt{2}) = 86^{mq},91.$$

XII.

838. **Problème.** *Fig.* 12. *Le côté* BC *d'un octogone régulier est égal à* 5 *mètres; on demande la surface.*

Solution. Le polygone entier se compose de 8 triangles isocèles tels que ABC.

Or, si nous exprimons par s la surface d'un de ces

triangles, nous aurons en opérant comme ci-dessus :

$$s = \frac{25(1+\sqrt{2})}{4};$$

multipliant par 8, nous obtiendrons pour la surface de l'octogone,

$$S = 8s = \frac{8 \times 25(1+\sqrt{2})}{4} = 50(1+\sqrt{2}) = 120^{mq},71.$$

2° **Solution**. *Fig.* 13. Le côté BC de l'octogone donné étant égal à 5 mètres, le périmètre vaudra 8 × 5 ou 40 mètres; et si nous exprimons par r, le rayon AD du cercle inscrit, nous aurons

$$(1) \qquad S = \frac{40r}{2} = 20r.$$

Traçons les deux droites KI, CH, nous aurons

$$KI = 2AD = 2r.$$

Le quadrilatère KBCU sera un losange, et l'on aura

$$KU = BC = BK = CU = 5 \text{ mètres}.$$

L'angle HCI sera droit, comme étant inscrit dans la demi-circonférence, qui aurait pour diamètre HI, de sorte que le triangle rectangle UCI, donnera

$$\overline{UI}^2 = \overline{UC}^2 + \overline{CI}^2,$$

qui devient $\overline{UI}^2 = (5)^2 + (5)^2 = 25 + 25 = 50,$

d'où $UI = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$

alors $KI = KU + UI$ devient

(2) $2r = 5 + 5\sqrt{2} = 5(1+\sqrt{2}),$

d'où $r = \frac{5(1+\sqrt{2})}{2};$

cette valeur étant portée dans l'équation (1) on a

$$S = 20r = \frac{20 \times 5(1+\sqrt{2})}{2} = 50(1+\sqrt{2}) = 120^{mq},71.$$

3ᵉ **Solution**. Fig. 14. Si nous traçons les droites AB, CD, OK, HU, le polygone donné contiendra

1° Un quarré MNPQ;

2° Quatre rectangles OMNH, BDQN, PQUK et AMPC;

3° Quatre triangles isocèles rectangles HNB, DQU, CPK et AMO.

Or, si nous exprimons le côté HN par x, nous aurons

$$\overline{HN}^2 + \overline{NB}^2 = \overline{HB}^2$$

qui devient $x^2 + x^2 = 25$,

ce qui donne $2x^2 = 25$,

d'où $x^2 = \frac{25}{2}$, et par conséquent $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

La surface du triangle HNB sera donc

$$\frac{NB \times NH}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{25}{4}$$

et les quatre triangles étant égaux leur somme vaudra 25.

Le rectangle

$$OHNM = MN \times NH = 5 \times x = 5 \times \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25}{\sqrt{2}}$$

et les quatre rectangles vaudront par conséquent $\frac{100}{\sqrt{2}}$.

Enfin le quarré MNPQ est évidemment égal à

$$\overline{OH}^2 = 5 \times 5 = 25.$$

Ainsi en nommant S la surface totale on aura

$$S = MNPQ + 4.\ OHMN + 4.\ HNB$$

$$= 25 + \frac{100}{\sqrt{2}} + 25 = 50 + \frac{100}{\sqrt{2}} = \frac{50(\sqrt{2} + 2)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{50(2 + 2\sqrt{2})}{2} = 50(1 + \sqrt{2}) = 120^{mq},71.$$

4ᵉ **Solution**. *Fig.* 15. Si nous prolongeons les côtés

OH, BD, KU, AC jusqu'à leur rencontre, nous aurons un quarré EFGI.

Le triangle rectangle HFB étant isocèle, on a

$$\overline{HF}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{HB}^2$$

qui en exprimant HF par x devient $x^2 + x^2 = 25$, ce qui donne $2x^2 = 25$, et par conséquent

$$x^2 = \frac{25}{2}, \quad \text{d'où } x = \frac{5}{\sqrt{2}};$$

or on a *Surface du triangle* $HFB = \frac{HF + FB}{2} =$

$$= \frac{x + x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{25}{4}, \text{ d'où } 4HFB = 25;$$

de plus, le côté

$$EF = OH + EO + HF = OH + 2\,HF =$$

$$= 5 + 2x = 5 + \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} + 10}{\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{2} + 2)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5(2 + 2\sqrt{2})}{2} = 5\,(1 + \sqrt{2});$$

par conséquent

Surfaoe quarrée $EFGI = \overline{EF}^2 = 25\,(1 + \sqrt{2})^2 =$

$$= 25\,(3 + 2\sqrt{2}).$$

On aura donc, pour l'octogone,

$$S = \overline{EF}^2 - 4.\,HFB = 25\,(3 + 2\,\sqrt{2}) - 25 =$$

$$= 25(3 + 2\sqrt{2} - 1) = 50\,(1 + \sqrt{2}) = 120^{mq},71.$$

XIII.

839. Problème. *Fig.* 16. *Le côté* BC *d'un décagone régulier, vaut* 3 *mètres; on demande le rayon* AB *du cercle circonscrit.*

Solution. Le problème du numéro 447 donne la proportion

$$AB : BC :: BC : (AB - BC).$$

Exprimons le rayon cherché AB par R, nous aurons

$$R : 3 :: 3 : (R - 3),$$

d'où résulte l'équation

$$R(R - 3) = 9,$$

qui, étant résolue, donne

$$R = \frac{3(1 \pm \sqrt{5})}{2};$$

négligeant la valeur négative qui ne peut pas convenir ici,

nous aurons $R = \frac{3(1 + \sqrt{5})}{2} = 4^m,85.$

840. **Corollaire** I. Pour obtenir le rayon AD du cercle inscrit, on remarquera que le triangle ABD est rectangle en D, ce qui donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2;$$

exprimant AD par r, on obtient

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{9}{4}.$$

Remplaçant R par sa valeur trouvée précédemment, on a

$$r^2 = \frac{9(1 + \sqrt{5})^2}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9(6 + 2\sqrt{5}) - 9}{4} = \frac{9(5 + 2\sqrt{5})}{4},$$

d'où $r = \frac{3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} = 4^m,61.$

841. **Cor.** II. Si l'on exprime par s la surface du triangle ABC, on aura

$$s = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{3 \times r}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2 \times 2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{4} = 6^{mq},92.$$

842. **Cor.** III. Si nous exprimons par S la surface du décagone nous aurons

$$S = 10.\,s = \frac{10\times9\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{45\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} = 69^{mq},23.$$

XIV.

843. **Problème.** Fig. 17. *Le côté* BC *d'un pentagone régulier vaut* 8 *mètres; on demande le rayon du cercle circonscrit.*

Solution. Si l'on trace AO perpendiculaire sur BC, le point O sera le milieu de l'arc BOC; la corde BO sera le côté du décagone régulier inscrit, et le problème du numéro 447 donnera la proportion

$$AB : BO :: BO : (AB - BO).$$

Or, si nous exprimons par x le côté BO du décagone, et par R le rayon AB du cercle circonscrit, la proportion précédente deviendra

$$R : x :: x : (R - x), \qquad \text{d'où}$$

(1) $$x^2 = R\,(R - x).$$

Mais par le théorème (426) on doit avoir

$$OD : BO :: BO : \textit{diamètre};$$

en exprimant DO par y cette proportion devient

$$y : x :: x : 2R, \qquad \text{d'où}$$

(2) $$2Ry = x^2.$$

Enfin le triangle rectangle BDO donnera

$$\overline{BO}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DO}^2,$$

ou, ce qui revient au même,

(3) $$x^2 = (4)^2 + y^2 = 16 + y^2.$$

Ainsi, toutes les conditions du problème seront exprimées par les équations

(1) $$x^2 = R(R - x),$$

(2) $$2Ry = x^2,$$

(3) $$x^2 = 16 + y^2.$$

La première équation étant résolue, donne

$$x = \frac{R(-1 + \sqrt{5})}{2},$$

d'où $$x^2 = \frac{R^2(3 - \sqrt{5})}{2}.$$

Cette valeur étant substituée dans les équations (2) et (3), on obtient

(4) $$2Ry = \frac{R^2(3 - \sqrt{5})}{2},$$

(5) $$\frac{R^2(3 - \sqrt{5})}{2} = 16 + y^2.$$

L'équation (4) donne

$$y = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{4},$$

d'où $$y^2 = \frac{R^2(7 - 3\sqrt{5})}{8}.$$

Substituant cette quantité dans l'équation (5), on obtient $$\frac{R^2(3 - \sqrt{5})}{2} = 16 + \frac{R^2(7 - 3\sqrt{5})}{8},$$

qui, étant résolue, donne

$$R = \frac{4\sqrt{10(5 + \sqrt{5})}}{5} = 6^m,8.$$

844. **Corollaire** I. Pour obtenir le rayon AD du cercle inscrit, on écrira

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2;$$

exprimant AD par r, on obtient

$$r^2 = R^2 - (4)^2 = \frac{16 \times 10(5+\sqrt{5})}{25} - 16 =$$

$$= \frac{800 + 160\sqrt{5} - 400}{25} = \frac{400 + 160\sqrt{5}}{25} =$$

$$= \frac{16 \times 5(5+2\sqrt{5})}{25},$$

d'où $$r = \frac{4\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{5} = 5^{m},50.$$

845. **cor.** II. Si l'on exprime par s la surface du triangle ABC, on aura

$$s = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{8 \times 4\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{2 \times 5} =$$

$$= \frac{16\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{5} = 22^{mq},02.$$

846. **cor.** III. La surface S du pentagone est égale à *cinq* fois celle du triangle ABC, ce qui donne

$$S = 16\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = 110^{mq},11.$$

XV.

847. **Problème.** *La surface d'un polygone régulier inscrit dans un cercle étant exprimée par* S, *on demande la surface* S' *du polygone semblable circonscrit.*

Solution. Si nous exprimons par R le rayon du cercle circonscrit, et par r le rayon du cercle inscrit, nous aurons, par le théorème 629,

(1) $$S' : S :: R^2 : r^2,$$

d'où $$S' = \frac{SR^2}{r^2}.$$

Ainsi, on devra *multiplier la surface du polygone inscrit par le quarré du rayon du cercle circonscrit, et diviser par le quarré du rayon du cercle inscrit.*

Appliquons ce principe au pentagone dont nous avons calculé la surface dans le problème précédent; nous avons

trouvé $$S = 16\sqrt{5(5+2\sqrt{5})},$$

$$R = \frac{4\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5},$$

$$r = \frac{4\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{5}.$$

Nous aurons par conséquent

$$S' = \frac{16\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \times \frac{16 \times 10(5+\sqrt{5})}{25}}{\frac{16 \times 5(5+2\sqrt{5})}{25}},$$

qui, après toutes réductions, devient

$$S' = 32\sqrt{10(5-\sqrt{5})} = 168^{mq},23.$$

848. **Corollaire.** La proportion (1) donne

$$S = \frac{S'r^2}{R^2},$$

ce qui permet de calculer le polygone inscrit, lorsque l'on connaît le polygone circonscrit et les deux rayons R et r.

XVI.

849. **Problème.** *Les trois côtés d'un triangle sont* 100 *mètres,* 90 *mètres et* 70 *mètres; on demande la surface.*

Solution. *Fig.* 1re, Pl. 23. Soit BC $=100$, AB $=90$, AC $=$ $=70$. Concevons la perpendiculaire AD, que nous exprimerons par h, on aura pour la surface

(1) $$S=\frac{BC\times AD}{2}=\frac{100h}{2}=50h.$$

Le triangle ABD, rectangle en D, nous donnera

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2,$$

qui, en exprimant BD par x, devient

(2) $$h^2=(90)^2-x^2.$$

Mais l'angle B est aigu, car s'il était obtus, il serait opposé au plus grand côté du triangle. Par conséquent, on aura, par le théorème du numéro 704,

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\times BD,$$ ou

(3) $$(70)^2=(90)^2+(100)^2-2\times 100x.$$

Ainsi, toutes les conditions du problème seront complétement exprimées par l'ensemble des équations

(1) $$S=50h,$$

(2) $$h^2=(90)^2-x^2,$$

(3) $$(70)^2=(90)^2+(100)^2-200x.$$

La troisième équation étant résolue, donne

$$x=66, \text{ d'où } x^2=(66)^2.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (2), on obtient

$$h^2=(90)^2-(66)^2=8100-4356=3744,$$

d'où $$h=\sqrt{3744}=12\sqrt{26},$$

et par conséquent

$$S=50\times 12\sqrt{26}=600\sqrt{26}=3059^{mq},41.$$

850. **Corollaire** I. Nous avons trouvé précédemment

$$AD=h=12\sqrt{26}=61^{m},19;$$

si l'on veut obtenir les autres perpendiculaires BK, CU, le travail sera beaucoup plus simple. En effet, on a

évidemment $\frac{AC \times BK}{2} = surf.\ ABC.$

Or, si l'on exprime BK par h', l'équation précédente deviendra $\frac{70h'}{2} = 600\sqrt{26},$

d'où $35h' = 600\sqrt{26},$

et par conséquent

$$h' = \frac{600\sqrt{26}}{35} = \frac{120\sqrt{26}}{7} = 87^{m},41.$$

On a ensuite $\frac{AB \times CU}{2} = surface\ ABC,$

qui, en exprimant CU par h'', devient

$$\frac{90h''}{2} = 600\sqrt{26},$$

d'où $45h'' = 600\sqrt{26}$

et par conséquent

$$h'' = \frac{600\sqrt{26}}{45} = \frac{40\sqrt{26}}{3} = 67^{m}.99.$$

851. cor. II. *Fig.* 2. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle donné. Traçons AD perpendiculaire sur BC, le diamètre AE que nous exprimerons par 2R, et la corde BE.

Le triangle ADC est rectangle en D, par construction; l'angle ABE est droit, puisqu'il est inscrit dans une demi-circonférence. De plus, les angles AEB, ACD sont égaux comme inscrits dans le même segment (196). Donc, les deux triangles ABE, ADC sont semblables, ce qui donne la proportion

$$AC : AE :: AD : AB,$$

qui devient $70 : 2R :: h : 90,$

d'où $2Rh = 70 \times 90,$

et par conséquent

$$Rh = 35 \times 90 = 3150;$$

mais on a trouvé précédemment

$$h = 12\sqrt{26}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente,

on a $R \times 12\sqrt{26} = 3150,$

d'où

$$R = \frac{3150}{12\sqrt{26}} = \frac{3150\sqrt{26}}{12 \times 26} = \frac{525\sqrt{26}}{52} = 51^{m},48.$$

852. **cor.** III. *Fig.* 3. Soit U, le centre du cercle inscrit dans le triangle donné. Si l'on exprime le rayon de ce cercle par r on aura

$$UM = UN = UV = r,$$

mais, on a évidemment,

$$\frac{BC \times UM}{2} = \frac{100r}{2} = 50r = surf.\,BUC$$

$$\frac{AB \times UN}{2} = \frac{90r}{2} = 45r = surf.\,AUB$$

$$\frac{AC \times UV}{2} = \frac{70r}{2} = 35r = surf.\,AUC,$$

ajoutant ces trois équations on aura

$$50r + 45r + 35r = surf.\,(BUC + AUB + AUC) =$$
$$= surf.\,ABC = 600\sqrt{26},$$

d'où $130r = 600\sqrt{26},$

et par conséquent

$$r = \frac{600\sqrt{26}}{130} = \frac{60\sqrt{26}}{13} = 23^{m},53.$$

XVII.

853. **Problème**. Fig. 4. *Par un point* D, *situé sur l'un des côtés du triangle* ABC, *mener la droite* DH, *de manière que les deux parties de la surface soient entre elles comme les nombres* 4 *et* 3.

Solution. Soit AB = 12 *mètres*, AC = 15 *mètres*, et AD = 8 *mètres*; il s'agit de trouver AH que nous exprimerons par x.

On doit avoir la proportion

$$ADH : DHCB :: 4 : 3,$$

ce qui donne, en composant,

$$(ADH + DHCB) : ADH :: (4 + 3) : 4,$$

d'où

$$ABC : ADH :: \quad 7 : 4.$$

Mais les deux triangles ABC, ADH ayant un angle égal on aura par le théorème du numéro 626

$$ABC : ADH :: 12 \times 15 : 8 \times x.$$

Les deux proportions ayant un rapport commun, on en déduit

$$7 : 4 :: 12 \times 15 : 8 \times x,$$

d'où

$$7 \times 8 \times x = 4 \times 12 \times 15,$$

et par conséquent

$$x = \frac{4 \times 12 \times 15}{7 \times 8} = \frac{90}{7} = 12^{m},85.$$

XVIII.

854. **Problème**. Fig. 5. *Partager un triangle* ABC *en deux parties équivalentes, par une droite* DH *parallèle à l'un des côtés.*

Solution. Soit AB = 12 *mètres*. Si nous exprimons AD par x, les deux triangles semblables ABC, ADH donneront (628) $ABC : ADH :: (12)^2 : x^2$.

mais on doit avoir

$$ABC : ADH :: 2 : 1,$$

donc, à cause du rapport commun, on aura

$$2 : 1 :: (12)^2 : x^2, \text{ d'où } 2x^2 = 144$$

qui, étant résolue, donne

$$x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = 8^m,48.$$

855. **Corollaire**. Si l'on voulait que le triangle donné fût partagé en trois parties égales, on exprimerait d'abord que le triangle ADH, vaut le *tiers* du triangle ABC; puis on chercherait une seconde parallèle qui déterminerait les *deux tiers* du même triangle.

Enfin on opérerait de la même manière pour partager le triangle donné en quatre ou cinq parties équivalentes (*Voir les numéros* 777 et 778).

XIX.

856. **Problème**. Fig. 6. *Partager un triangle en trois parties équivalentes, par deux droites perpendiculaires à l'un des côtés.*

Solution. Soit AB = 6 *mètres*, AC = 5 *mètres*, et BC = 4 *mètres*. En opérant comme au numéro 849 on calculera d'abord $BP = \frac{27}{8}$, puis $AP = \frac{15\sqrt{7}}{8}$,

et l'on aura pour la surface S du triangle donné,

$$S = \frac{BC \times AP}{2} = \frac{15\sqrt{7}}{4};$$

Mais le triangle BDO doit être le tiers de la surface totale, ce qui donnera

$$\frac{BD \times DO}{2} = \frac{S}{3} = \frac{5\sqrt{7}}{4};$$

exprimant BD par x et DO par y, cette équation devient, après réductions,

$$(1) \qquad xy = \frac{5\sqrt{7}}{2},$$

or, les deux triangles BDO, BPA étant semblables donnent la proportion

BD : OD :: BP : AP qui devient $x : y :: \frac{27}{8} : \frac{15\sqrt{7}}{8}$,

d'où $27y = 15\,x\sqrt{7}$.

Cette équation étant résolue par rapport à y, on obtient $y = \frac{15x\sqrt{7}}{27} = \frac{5x\sqrt{7}}{9}$,

qui, étant reportée, dans l'équation (1) donne

$$\frac{5x^2\sqrt{7}}{9} = \frac{5\sqrt{7}}{2}; \quad \text{d'où } x = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2^m,12.$$

Pour obtenir BH, que nous désignerons par x', on remarquera que le triangle BHK doit être égal aux deux tiers du triangle total, et que par conséquent il doit être le double du triangle BDO, nous aurons par conséquent la proportion

BDO : BHK :: 1 : 2.

Mais la similitude des deux triangles BDO, BHK donnera (628) BDO : BHK :: $x^2 : x'^2$.

On aura, par suite du rapport commun,

$$x^2 : x'^2 :: 1 : 2,$$

d'où $x'^2 = 2x^2$, et par conséquent $x' = x\sqrt{2}$;

remplaçant x par la valeur trouvée précédemment, on obtient $\text{BH} = x' = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 3.$

857. **Corollaire**. Si l'on trouvait BH plus grand que BP, cela indiquerait que la seconde perpendiculaire doit

être située à droite de AD, et, dans ce cas, il faudrait chercher sa distance au point C en opérant comme nous l'avons fait pour trouver BD.

XX.

858. **Problème**. Fig. 7. *Les bases* AB, CD *d'un trapèze sont* 15 *mètres et* 6 *mètres; les deux côtés obliques se rencontrent en un point* P *qui est à* 12 *mètres de la plus grande base; on demande la surface du trapèze.*

Solution. Soit MN la hauteur que nous exprimerons par h, nous aurons pour la surface du trapèze (602)

$$(1) \qquad S = \frac{MN\,(AB + CD)}{2} = \frac{h\,(15 + 6)}{2} = \frac{21h}{2}.$$

Pour trouver h nous rappellerons que $PN = 12$ et que par conséquent

$$PM = PN - MN = 12 - h;$$

or le corollaire du numéro 373 donne

$$AB : CD :: PN : PM$$

qui devient $\quad 15 : 6 :: 12 : (12 - h),$

d'où $\quad 15\,(12 - h) = 6 \times 12,$

qui, étant résolue, donne $h = \frac{36}{5}$,

et par conséquent

$$S = \frac{21 \times 36}{2 \times 5} = 75^{mq},60.$$

XXI.

859. **Problème**. Fig. 8. *Les deux bases* AB, CD *d'un trapèze isocèle, sont* 12 *mètres et* 8 *mètres, la hauteur vaut* 6 *mètres; on demande par quel point de la grande base il faut élever une perpendiculaire pour que la surface soit partagée dans le rapport des nombres* 2 et 3.

Solution. Le trapèze donné étant isocèle, il s'ensuit que si l'on construit les perpendiculaires CO, DK, les deux triangles ACO, DKB seront égaux ;

or on a $AO + OK + KB = 12$,
retranchant $OK = 8$
il reste $AO + KB = 4$,
et puisque $AO = KB$, il en résulte que chacune de ces lignes est égale à 2; ainsi on a

$$tri.\ ACO = tri.\ DKB = \frac{2 \times 6}{2} = 6.$$

Supposons actuellement que la perpendiculaire demandée soit MN, et nommons x la distance ON, on aura

$$NK = OK - ON = 8 - x,$$

d'où l'on conclura

$$Rect.\ CMON = MN \times ON = 6x,$$
$$Rect.\ MDKN = MN \times NK = 6\ (8 - x).$$

Mais on doit avoir

$$(ACO + CMON) : (DBK + MDKN) :: 2 : 3;$$

ou $$(6 + 6x) : \left[6 + 6\ (8 - x)\right] :: 2 : 3;$$

on en déduit l'équation

$$3\ (6 + 6x) = 2\left[6 + 6\ (8 - x)\right],$$

qui, étant résolue, donne

$$ON = x = 3 \text{ mètres};$$

ainsi le point N est situé à 5 *mètres* du point A.

XXII.

860. **Problème.** Fig. 9. *Les bases* AB, CD *d'un trapèze isocèle, sont* 10 *mètres et* 2 *mètres, la hauteur* AE = 8 *mètres ; on veut partager la surface en deux parties équivalentes, par une droite* MN *perpendiculaire au côté* AC.

Solution. Concevons les droites AE, BH perpendiculaires sur CD. Le trapèze donné étant isocèle, les deux triangles AEC, BDH, seront égaux et nous aurons

$$EC = DH,$$

d'où $2\,EC = EC + DH = EH - CD = 10 - 2 = 8$,

par conséquent $EC = 4$.

Le triangle AEC étant rectangle en E donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$$

qui devient

$$\overline{AC}^2 = (8)^2 + (4)^2 = 64 + 16 = 80,$$

d'où $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Si nous traçons la droite BO, perpendiculaire sur AC, les deux angles EAC, ABO seront égaux, parce qu'ils auront leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, et les angles AEC, AOB étant égaux comme droits, il s'ensuit que les deux triangles AEC, ABO seront semblables; d'où résulte la proportion

$$AC : AB :: AE : BO,$$

qui devient $4\sqrt{5} : 10 :: 8 : BO$,

d'où $BO = \dfrac{10 \times 8}{4\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$.

La comparaison des mêmes triangles donne la proportion $AC : AB :: EC : AO$,

qui devient $4\sqrt{5} : 10 :: 4 : AO$,

d'où $AO = \dfrac{10 \times 4}{4\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

Si nous traçons la droite DU perpendiculaire sur le prolongement de AC, les deux triangles rectangles AEC, DUC seront semblables puisque les angles ACE, DCU seront opposés par le sommet; on aura donc la proportion

$$AC : DC :: AE : DU,$$

qui devient $4\sqrt{5} : 2 :: 8 : DU$,

d'où $$DU = \frac{2 \times 8}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

La comparaison des mêmes triangles, donne la proportion $AC : CD :: EC : CU$,

qui devient $4\sqrt{5} : 2 :: 4 : CU$,

d'où $$CU = \frac{2 \times 4}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

On conclura de ce qui précède,

$$\textit{Triangle}\ AOB = \frac{BO \times AO}{2} = \frac{4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = 20,$$

$$\textit{Triangle}\ CUD = \frac{DU \times CU}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{4}{5}.$$

Exprimons actuellement OM par x, et MN par y; traçons les deux droites DF, NI perpendiculaires sur BO, nous aurons la proportion

$$FB : IB :: DF : NI,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(BO - DU) : (BO - MN) :: (AC + CU - AO) : OM,$$

qui devient, en remplaçant chaque terme par sa valeur obtenue précédemment

$$\left(4\sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) : \left(4\sqrt{5} - y\right) :: \left(4\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}\right) : x.$$

réduisant, on obtient

$$\frac{16}{\sqrt{5}} : \left(4\sqrt{5} - y\right) :: \frac{12}{\sqrt{5}} : x, \text{ d'où } x = \frac{3\left(4\sqrt{5} - y\right)}{4}.$$

Mais, pour que le trapèze donné soit partagé en deux parties égales, il faut que l'on ait

$$\textit{quadrilatère}\ AMNB = \frac{\textit{trapèze}\ ABCD}{2},$$

ou ce qui revient au même

$$\textit{tri.}\ AOB + \textit{trap.}\ MNOB = \frac{\textit{trap.}\ ABCD}{2}.$$

Remplaçant ces quantités par leurs valeurs on obtient

$$20 + \frac{x(4\sqrt{5} + y)}{2} = \frac{8(10+2)}{2 \times 2};$$

remplaçant x par sa valeur trouvée précédemment, on obtient l'équation

$$20 + \frac{3(4\sqrt{5} - y) \times (4\sqrt{5} + y)}{4 \times 2} = \frac{8(10+2)}{2 \times 2},$$

qui, étant résolue, donne

$$y = \sqrt{\frac{208}{3}} = 8^m,32;$$

on conclura de ce qui précède

$$OM = x = \frac{3\left(4\sqrt{5} - \sqrt{\frac{208}{3}}\right)}{4} = \frac{3(8,94 - 8,32)}{4} =$$

$$= \frac{3 \times 0,62}{4} = 0^m,46,$$

et par conséquent

$$AM = AO + OM = 2\sqrt{5} + 0,46 = 4,47 + 0,46 = 4^m,93.$$

XXIII.

861. **Problème.** Fig. 10. *Partager un quadrilatère* ABCD *en deux parties équivalentes par une droite* MN *perpendiculaire au côté* CD.

Solution. On tracera les deux droites AH, BK perpendiculaires sur CD, puis on mesurera les distances AH, BK, CH, HD et DK.

Supposons que l'on ait trouvé

AH = 12 *mètres*; BK = 8 *mètres*;
CH = 4 *mètres*; HD = 10 *mètres*,
et DK = 2 *mètres*, on aura

$$\textit{Triangle}\quad ACH = \frac{CH \times AH}{2} = \frac{4 \times 12}{2} = 24^{mq}.$$

$$\textit{Triangle}\quad BKD = \frac{DK \times BK}{2} = \frac{2 \times 8}{2} = 8^{mq}.$$

$$\textit{Trapèze}\quad ABKH = \frac{HK\,(AH + BK)}{2} = \frac{12 \times 20}{2} = 120^{mq}.$$

$$\textit{Quadril.}\quad ABCD = ACH + ABKH - BKD = $$
$$= 24 + 120 - 8 = 136^{mq}.$$

$$\textit{Quadril.}\quad AMNC = \frac{\textit{quadril.}\ ABCD}{2} = 68^{mq}.$$

$$\textit{Trapèze}\quad AMNH = AMNC - ACH = 68 - 24 = 44^{mq}.$$

Donc, si nous exprimons HN par x, et MN par y, nous aurons

$$(1)\quad \textit{Trapèze}\ AMNH = \frac{x(12+y)}{2} = 44^{mq}.$$

Traçons actuellement les deux droites MO, BI perpendiculaires sur AH, et par conséquent parallèles à CK, nous aurons

$$OM = HN = x.$$
$$IB = HK = HD + DK = 10 + 2 = 12.$$
$$AO = AH - MN = 12 - y.$$
$$AI = AH - BK = 12 - 8 = 4.$$

Mais les triangles semblables AOM, AIB donnent la proportion $AO : AI :: OM : IB$,
qui devient $(12 - y) : 4 :: x : 12$, d'où

$$(2)\quad 12(12 - y) = 4x.$$

Multipliant les équations (1) et (2) l'une par l'autre, on obtient, après toutes réductions,

$$y = \sqrt{\frac{344}{3}},$$

qui, étant substituée dans l'équation (2), donne

$$x = \frac{12\left(12 - \sqrt{\frac{344}{3}}\right)}{4} = 36 - \sqrt{1032} = 3^{m},88.$$

Ainsi on aura

$$CN = CH + HN = 4 + 3,88 = 7^{m},88.$$

862. **Corollaire.** On agirait de même si l'on voulait partager la surface donnée en plusieurs parties égales, ou qui eussent entre elles des rapports donnés. Ainsi, par exemple, si l'on veut partager en trois parties égales, on exprimera que le premier quadrilatère AMNC doit être le *tiers* de la surface totale, et l'on cherchera ensuite une seconde perpendiculaire qui détermine les *deux tiers*.

XXIV.

863. **Problème.** *Le périmètre d'un polygone vaut 6 mètres. On demande le contour d'un polygone semblable, dont la surface ne vaudrait que les* $\frac{2}{3}$ *de celle du premier polygone.*

Solution. Les surfaces des polygones semblables sont semblables entre elles comme les quarrés des côtés homologues (629); mais ces côtés sont entre eux comme les périmètres; d'où il résulte que les surfaces seront comme les quarrés des périmètres. Ainsi, en exprimant par P le périmètre demandé, on aura $3 : 2 :: (6)^2 : P^2$,

ce qui donne $$P^2 = \frac{2 \times (6)^2}{3},$$

d'où $$P = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} = 4^{m},90.$$

XXV.

864. **Problème.** *La diagonale d'un parallélogramme*

vaut 15 mètres; la somme des côtés adjacents vaut 30 mètres; leur différence est égale à 6 mètres; on demande la seconde diagonale du parallélogramme.

Solution. Exprimons les côtés adjacents par x et par y, nous aurons les deux équations

$$x + y = 30,$$
$$x - y = 6,$$

qui, étant résolues, donnent

$$x = 18; \quad y = 12.$$

Exprimons actuellement par z la seconde diagonale; le théorème du numéro 724 donnera

$$2(18)^2 + 2(12)^2 = (15)^2 + z^2,$$

d'où $$z^2 = 648 + 288 - 225 = 711,$$

et par conséquent

$$z = \sqrt{711} = 3\sqrt{79} = 26^m,66.$$

XXVI.

865. **Problème.** *La diagonale d'un quarré surpasse le côté de 10 mètres; on demande la valeur du côté.*

Solution. Si l'on exprime par x le côté cherché, la diagonale sera $x + 10$. Or, le triangle rectangle formé par cette diagonale et les deux côtés du quarré donnera l'équation $$2x^2 = (x + 10)^2,$$

qui, étant résolue, donne

$$x = 10(1 + \sqrt{2}) = 24^m,14.$$

XXVII.

866. **Problème.** *La différence entre le rayon d'un cercle et le côté du décagone régulier inscrit est égale à 2 mètres; on demande le rayon.*

Solution. Si nous exprimons le rayon demandé par R, le côté du décagone sera (R — 2), et le problème du numéro 447 donnera

$$R : (R-2) :: (R-2) : \left[R-(R-2)\right],$$

d'où $$R\left[R-(R-2)\right] = (R-2)^2,$$

qui, étant résolue, donne

$$R = 3 + \sqrt{5} = 5^m,24.$$

Le côté du décagone sera

$$R - 2 = 1 + \sqrt{5} = 3^m,24.$$

XXVIII.

867. **Problème**. Fig. 11. *Le rayon* OB *d'un cercle est égal à* 6 *mètres ; on demande la longueur de la tangente* AD *menée par un point* A *situé à* 10 *mètres du centre.*

Solution. Le point A étant à 10 mètres du centre, on aura $AC = AO - CO = 10 - 6 = 4$.

Mais le corollaire 432 donne la proportion

$$AC : AD :: AD : AB.$$

Exprimant AD par x, on aura

$$4 : x :: x : 16,$$

d'où $x^2 = 64$, et par conséquent $x = 8$.

2ᵉ Solution. Le triangle ADO rectangle en D donnera

$$\overline{AD}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{AO}^2,$$

qui devient $$x^2 + 36 = 100,$$

d'où $x^2 = 64$, et par conséquent $x = 8$.

XXIX.

868. **Problème**. Fig. 12. *Dans un cercle dont le rayon* $R = 5$ *mètres, on a deux cordes parallèles ; l'une d'elles* $ID = 8$ *mètres, et la seconde* $HC = 6$ *mètres. On demande à quelle distance du centre se rencontreront les droites* IH, DC, *passant par les extrémités des deux cordes.*

Solution. Le théorème du numéro 424 donnera la proportion $MA : AC :: AC : AN$,
qui devient $(5 - AO) : 3 :: 3 : (5 + AO)$,
ce qui donne $(5 - AO)(5 + AO) = 9$,
d'où $AO = 4$.

Le même théorème donne

$$MB : BD :: BD : BN,$$

qui devient $(5 - BO) : 4 :: 4 : (5 + BO)$,
ce qui donne $(5 - BO)(5 + BO) = 16$,
d'où $BO = 3$.

On aura donc

$$AB = AO - BO = 4 - 3 = 1.$$

Mais les deux triangles semblables SAC, SBD donneront $SA : SB :: AC \quad BD$,
qui, en exprimant SA par x, devient

$$x : (x + 1) :: 3 : 4,$$

d'où $4x = 3(x + 1)$;
et par conséquent $x = 3$.

Ainsi on aura

$$OS = OA + SA = 4 + 3 = 7.$$

XXX.

869. **Problème**. Fig. 12. *Dans un cercle dont le rayon* R = 12 *mètres, on conçoit deux cordes parallèles; l'une d'elles* ID, *située à* 3 *mètres du centre, et la seconde* HC *à* 8 *mètres; on demande à quelle distance du centre se rencontreront les droites* IH, DC, *passant par les extrémités des deux cordes.*

Solution. Le diamètre MN étant perpendiculaire sur les deux cordes HC, ID, nous aurons par le théorème 424

$$MA : AC :: AC : AN,$$

qui devient $(12-8) : AC :: AC : (12+8)$,
ce qui donne

$$\overline{AC}^2 = (12-8)(12+8) = 144 - 64 = 80,$$

d'où $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Le même théorème donne la proportion

$$MB : BD :: BD : BN,$$

qui devient $(12-3) : BD :: BD : (12+3)$,
ce qui donne

$$\overline{BD}^2 = (12-3)(12+3) = 144 - 9 = 135,$$

d'où $BD = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$.

Les triangles semblables SAC, SBD donnent la proportion $SA : SB :: AC : BD$;
exprimant SA par x, et remarquant que

$$AB = AO - BO = 8 - 3 = 5,$$

la proportion précédente devient

$$x : (x+5) :: 4\sqrt{5} : 3\sqrt{15};$$

d'où l'on déduit l'équation

$$x \times 3\sqrt{15} = (x+5) \times 4\sqrt{5},$$

qui, après toutes réductions, devient

$$x = \frac{20(4+3\sqrt{3})}{11} = 16^{m},72.$$

On aura par conséquent

$$OS = OA + x = 8 + 16,72 = 24^{m},72.$$

870. **Corollaire.** On pourra se proposer pour exercice de déterminer le point de rencontre des deux diagonales du trapèze IHCD.

On pourra supposer aussi que les deux cordes sont de différents côtés par rapport au centre.

XXXI.

871. Problème. Fig. 13. *La demi-circonférence* ABCD *est partagée en trois parties égales par les deux points* B *et* C; *le diamètre* AD *est aussi partagé en parties égales par les points* V, U. *Enfin le rayon du cercle est* 4 *mètres; on demande à quelle distance du centre se rencontreront les deux droites* BV, CU.

Solution. Soit S, le point demandé, concevons les droites SA, SD, prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent BC aux points I et K, la droite IK sera partagée dans le même rapport que AD par les droites SB, SC, de sorte que l'on aura $IB = BC = CK$.
mais on a $BC = BA$; donc, $IB = BA$,
et l'angle ABI, extérieur de l'hexagone régulier ABCDMN valant $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, il s'ensuit que le triangle ABI est équilatéral.

Le triangle SAD, semblable à AIB, sera donc aussi équilatéral et l'on aura

$$SA = AD = 8.$$

Mais le triangle rectangle SAO donne

$$\overline{SO}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AO}^2$$

qui devient $\overline{SO}^2 = (8)^2 - (4)^2 = 64 - 16 = 48$,

d'où $SO = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 6^m,93$.

XXXII.

872. Problème. *La différence entre la circonférence d'un cercle et le contour du triangle équilatéral inscrit, est égale à* $0^m,3$; *on demande le rayon du cercle.*

Solution. Fig. 8. Pl. 22. Le triangle rectangle ABD donne l'équation $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$; (1)
exprimons AB par x nous aurons

$$BD = \frac{BC}{2} = \frac{x}{2};$$

mais DS étant égal à $\frac{OS}{2}$ ou $\frac{R}{2}$, il s'ensuit que $AD = \frac{3R}{2}$,
et l'équation (1) devient

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3R}{2}\right)^2,$$

qui, étant résolue donne

$$x = R\sqrt{3}.$$

Le périmètre du triangle équilatéral sera par conséquent $3R\sqrt{3}$, mais la circonférence du cercle étant $2\pi R$, on aura, d'après l'énoncé,

$$2\pi R - 3R\sqrt{3} = 3 \textit{ décimètres},$$

d'où $$R = \frac{3}{2\pi - 3\sqrt{3}}.$$

Si nous faisons $\pi = 3{,}14$, nous aurons

$$R = \frac{3}{6{,}28 - 3\sqrt{3}} = 2{,}77 \textit{ décimètres} = 0^m{,}277.$$

En faisant $\pi = 3{,}1416$
nous aurions trouvé

$$R = \frac{3}{6{,}2832 - 3\sqrt{3}} = 2{,}76 \textit{ décimètres} = 0^m{,}276.$$

873. **Remarque**. Nous avons dit au numéro 576 que π est le rapport numérique de la circonférence au diamètre. La valeur de ce rapport est exprimée par 3,1415926, etc. Dans la plupart des problèmes suivants, nous prendrons 3,14 pour la valeur de π; si l'on veut plus d'exactitude,

on fera $\pi = 3{,}14159$ ou plutôt $= 3{,}1416$, ce qui suffit presque toujours dans les applications.

D'ailleurs, le nombre π étant plus petit que 4, et π^2 plus petit que 10, il suffit de calculer, avec un chiffre décimal de plus, tous les termes qui contiendront le facteur π ou π^2.

XXXIII.

874. **Problème**. *Les circonférences de deux cercles diffèrent entre elles de* 8 *mètres, les rayons sont entre eux comme les nombres* 2 *et* 3; *on demande les valeurs absolues des deux circonférences et les longueurs de leurs rayons.*

Solution. Si nous exprimons par R et r les rayons des deux cercles demandés, nous aurons pour la différence des circonférences,

$$2\pi R - 2\pi r = 8; \qquad (1)$$

mais, pour satisfaire à la question proposée, on doit avoir

$$r : R :: 2 : 3,$$

et les circonférences étant entre elles comme leurs rayons on aura

$$2\pi r : 2\pi R :: 2 : 3,$$

d'où

$$2\pi r = \frac{2 \times 2\pi R}{3} = \frac{4\pi R}{3}.$$

Cette valeur étant reportée dans l'équation (1), on obtient

$$2\pi R - \frac{4\pi R}{3} = 8,$$

d'où

$$2\pi R = 24 \textit{ mètres},$$

et par conséquent

$$2\pi r = \frac{2 \times 24}{3} = 16 \textit{ mètres}.$$

Ainsi on aura $R = \dfrac{24}{2\pi} = \dfrac{12}{\pi} = 3^m{,}82$,

$$r = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi} = 2^m{,}54.$$

XXXIV.

875. **Problème**. *Les circonférences de deux cercles sont entre elles comme les nombres 4 et 3; la différence des rayons est 6; on demande la valeur de chaque circonférence.*

Solution. On aura par l'énoncé

$$2\pi R : 2\pi r :: 4 : 3,$$

d'où $$8\pi r = 6\pi R;$$

mais la différence des rayons étant égale à 6, on a

$$R = r + 6.$$

Cette valeur étant portée dans l'équation précédente, on obtient $$8\pi r = 6\pi(r + 6),$$

d'où $r = 18$ *mètres*, et par conséquent $R = 24$ *mètres*.

On aura donc pour la plus grande des deux circonférences $$2\pi R = 2\pi \times 24 = 48\pi = 150^{m},80,$$

et pour la plus petite

$$2\pi r = 2\pi \times 18 = 36\pi = 113^{m},10.$$

XXXV.

876. **Problème**. *Le rayon d'un cercle vaut 12 mètres; on demande la longueur absolue de l'arc compris entre les deux rayons qui forment au centre un angle égal à $\frac{5}{7}$ d'angle droit.*

Solution. Les arcs sont entre eux comme les angles auxquels ils correspondent (505). Par conséquent, en exprimant l'arc demandé par x, on aura

$$1 \text{ angle droit} : \frac{5}{7} :: \frac{1}{4} \text{ de circonf.} : x.$$

ou, ce qui est la même chose,

$$1 : \frac{5}{7} :: \frac{2\pi R}{4} : x;$$

ce qui donne $x = \frac{5\pi R}{14}$;

mais on sait par l'énoncé que $R = 12$. Ainsi, on aura

$$x = \frac{5\pi \times 12}{14} = \frac{10\pi}{7} = 4^m,49.$$

XXXVI.

877. **Problème**. *La différence des circonférences de deux cercles est égale à $0^m,6$; la différence de leurs surfaces est 2 mètres quarrés; on demande les deux rayons.*

Solution. La différence des deux circonférences est

$$2\pi R - 2\pi r = 6 \textit{ décimètres}, \quad \text{ou}$$

(1) $$\pi(R - r) = 3.$$

On a de plus pour la différence des surfaces

$$\pi R^2 - \pi r^2 = 200 \textit{ décimètres quarrés } (590), \quad \text{ou}$$

(2) $$\pi(R^2 - r^2) = 200.$$

Divisant l'équation (2) par (1), et réduisant, on obtient

(3) $$R + r = \frac{200}{3};$$

mais l'équation (1) donne

(4) $$R - r = \frac{3}{\pi}.$$

Ajoutant les équations (3) et (4), on obtient

$$2R = \frac{200}{3} + \frac{3}{\pi} = \frac{200\pi + 9}{3\pi},$$

d'où $R = \frac{200\pi + 9}{6\pi} = 33,8 \textit{ décimètres} = 3^m,38.$

Retranchant l'équation (4) de (3), on a

$$2r = \frac{200}{3} - \frac{3}{\pi} = \frac{200\pi - 9}{3\pi},$$

d'où $r = \frac{200\pi - 9}{6\pi} = 32{,}8$ *décimètres* $= 3^{m}28.$

XXXVII.

878. **Problème**. *La circonférence d'un cercle vaut* 18 *mètres ; on demande la surface.*

Solution. On a $2\pi R = 18,$

d'où $R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi},$

ce qui donne $R^2 = \frac{81}{\pi^2},$ et par conséquent

$$\textit{Surface} = \pi R^2 = \frac{81}{\pi} = 25^{mq},78.$$

XXXVIII.

879. **Problème**. *La surface d'un cercle vaut* 12 *mètres quarrés ; on demande la circonférence.*

Solution. On a $\pi R^2 = 12,$

d'où $R = \sqrt{\frac{12}{\pi}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}},$ ce qui donne

$$\textit{Circonférence} = 2\pi R = \frac{2\pi \times 2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} = 4\sqrt{3\pi} = 12^{m},28.$$

XXXIX.

880. **Problème**. *Le contour d'un rectangle vaut* 72 *mètres ; les deux côtés adjacents sont entre eux comme*

les nombres 2 *et* 3; *on demande la circonférence du cercle équivalent.*

Solution. Soit x la base et y la hauteur du rectangle, on aura par l'énoncé

(1) $$2x + 2y = 72,$$

on a ensuite $x : y :: 2 : 3,$ d'où

(2) $$3x = 2y.$$

Les équations (1) et (2) étant résolues, donnent

$$x = \frac{72}{5}; \quad y = \frac{108}{5},$$

et si nous exprimons par S la surface du rectangle, nous aurons

$$S = \frac{72}{5} \times \frac{108}{5} = \frac{7776}{25};$$

mais le cercle demandé devant être équivalent au rectangle, on aura

$$\pi R^2 = \frac{7776}{25},$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{7776}{25\pi}} = \frac{36\sqrt{6}}{5\sqrt{\pi}},$$

et par conséquent

$$2\pi R = \frac{2\pi \times 36\sqrt{\pi}}{5\sqrt{\pi}} = \frac{72\sqrt{6\pi}}{5} = 62^{m},52.$$

XL.

881. **Problème.** *Le contour d'un quarré vaut* 18 *mètres; on demande la circonférence du cercle équivalent.*

Solution. Les quatre côtés du quarré étant égaux, chacun d'eux vaudra

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2},$$

et la surface sera

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4},$$

Mais le cercle étant équivalent au quarré, on doit avoir

$$\pi R^2 = \frac{81}{4},\ \text{d'où}\ R^2 = \frac{81}{4\pi},$$

et par conséquent $R = \sqrt{\frac{81}{4\pi}} = \frac{9}{2\sqrt{\pi}}$;

ce qui donnera pour la circonférence du cercle

$$2\pi R = \frac{2\pi \times 9}{2\sqrt{\pi}} = 9\sqrt{\pi} = 15^{m},95.$$

XLI.

882. **Problème.** *La surface d'un cercle vaut 24 mètres quarrés ; on demande la surface d'un quarré dont le périmètre serait égal à la circonférence du cercle.*

Solution. On a pour la surface du cercle

$$\pi R^2 = 24,\quad \text{d'où}\quad R^2 = \frac{24}{\pi};$$

ce qui donne $R = \sqrt{\frac{24}{\pi}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$,

on aura donc pour la circonférence

$$2\pi R = \frac{2\pi \times 2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} = 4\sqrt{6\pi};$$

ce nombre devant être égal au périmètre du quarré, chaque côté sera égal à $\frac{4\sqrt{6\pi}}{4} = \sqrt{6\pi}$,

donc la surface du quarré sera $6\pi = 18^{mq},85$.

XLII.

883. **Problème.** Fig. 14. *Le rayon d'un cercle vaut 10 mètres ; on demande la surface du segment correspondant à un arc de 72 degrés.*

Solution. Puisque l'arc BOC vaut 72 degrés, ou le cinquième de la circonférence entière, il s'ensuit que le secteur ABOC vaut le cinquième de la surface du cercle, ce qui donne

$$(1) \qquad \textit{secteur}\ \text{ABOC} = \frac{\pi R^2}{5} = \frac{100\pi}{5} = 20\pi.$$

Mais le rayon du cercle étant connu, on pourra calculer le côté BC du pentagone, ainsi que l'apothème AD et la surface du triangle ABC (845), ce qui donnera

$$(2) \qquad \textit{triangle}\ \text{ABC} = \frac{25\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}.$$

Retranchant cette équation de l'équation (1), on obtient

$$\textit{segm.}\ \text{BDCO} = \textit{sect.}\ \text{ABOC} - \textit{tri.}\ \text{ABC} =$$

$$20\pi - \frac{25\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2} = 62{,}83 - 47{,}55 = 15^{\text{mq}}{,}28.$$

XLIII.

884. **Problème**. Fig. 15. *Deux circonférences se coupent aux points* B *et* C ; *l'arc* BOC *vaut le* sixième *de la grande circonférence, et l'arc* BO'C *est égal au* quart *de la petite. On sait de plus que la corde* BC = 3 mètres ; *on demande la surface comprise entre les deux arcs* BOC, BO'C.

Solution. Il est évident que la surface demandée est la somme des deux segments BOCI, BO'CI ; or, puisque l'arc BOC vaut le *sixième* de la grande circonférence, il s'ensuit que la corde BC est égale au rayon AB que nous exprimerons par R ; ainsi on aura (292)

$$R = BC = 3\ \textit{mètres}\,;$$

la surface du plus grand des deux cercles sera donc

$$\pi R^2 = 9\pi$$

et le secteur ABOC vaudra

$$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}.$$

Mais le triangle ABC étant équilatéral on aura, en opérant comme au numéro 820,

$$surf.\ ABC = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$ et par conséquent

(1) $$segm.\ BOCI = sect.\ ABOC - tri.\ ABC = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{4}.$$

Puisque l'arc BO'C vaut le *quart* de la petite circonférence, il s'ensuit que l'angle BA'C est droit, et le triangle rectangle BA'C donnera

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA'}^2 + \overline{A'C}^2,$$

qui, en exprimant A'B par r, devient

$$(3)^2 = r^2 + r^2, \qquad \text{d'où } r^2 = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2};$$

la surface du petit cercle sera donc

$$\pi r^2 = \frac{9\pi}{2},$$

et par conséquent

$$secteur\ BA'CO' = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{9\pi}{8};$$

mais le triangle rectangle BA'C est égal à

$$\frac{BA' \times A'C}{2} = \frac{r^2}{2} = \frac{9}{4},$$

par conséquent on aura

(2) $$segm.\ BO'CI = sect.\ BA'CO' - tri.\ BA'C = \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9\pi - 18}{8};$$

ajoutant les équations (1) et (2) on aura

$$surf.\ BOCO' = segm.\ BOCI + segm.\ BO'CI = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\pi - 18}{8} = \frac{12\pi - 18\sqrt{3} + 9\pi - 18}{8} = \frac{21\pi - 18 - 18\sqrt{3}}{8} = 2^{mq},10.$$

XLIV.

885. **Problème.** Fig. 16. *Sur les côtés d'un triangle rectangle* BAC, *on décrit les trois demi-circonférences* BAC, BO'A, AU'C. *On demande la somme des surfaces* AO'BO + AU'CU. *On sait que* AB = 18 *mètres*, *et que* AC = 15 *mètres.*

Solution. Le triangle BAC étant rectangle, on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = (18)^2 + (15)^2 = 549,$$

d'où $$BC = 3\sqrt{61}.$$

Le demi-cercle AO'B a pour rayon $\frac{AB}{2} = \frac{18}{2} = 9$. La surface entière du cercle sera donc égale à $\pi \times (9)^2 = 81\pi$, et par conséquent le demi-cercle AO'B $= \frac{81\pi}{2}$.

Le demi-cercle AU'C a pour rayon $\frac{AC}{2} = \frac{15}{2}$, la surface entière du cercle vaudra $\pi \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225\pi}{4}$, et le demi-cercle AU'C $= \frac{225\pi}{8}$.

Enfin le demi-cercle BOAUC, ayant pour rayon $\frac{BC}{2} = \frac{3\sqrt{61}}{2}$, la surface du cercle entier sera

$$\pi \times \left(\frac{3\sqrt{61}}{2}\right)^2 = \frac{9 \times 61\pi}{4} = \frac{549\pi}{4},$$

d'où il résulte que le demi-cercle

$$BOAUC = \frac{549\pi}{8}.$$

De plus le triangle BAC étant rectangle en A, sa surface est égale à

$$\frac{BA \times AC}{2} = \frac{18 \times 15}{2} = 9 \times 15 = 135.$$

Or, on a évidemment pour la surface demandée

Surf. (AO'BO + AU'CU) = *demi-cercle* ABO' + *demi-cercle* ACU' + *triangle* ABC — *demi-cercle* BOAUC.

Remplaçant toutes ces quantités par leurs valeurs trouvées précédemment, on obtient

$$Surf.\ (AO'BO + AU'CU) = \frac{81\pi}{2} + \frac{225\pi}{8} + 135 - \frac{549\pi}{8} =$$
$$= \frac{324\pi + 225\pi - 549\pi}{8} + 135 = 135 \textit{ mètres quarrés.}$$

886. **Corollaire.** On peut se proposer comme exercice, de prouver que la somme des deux croissants AO'BO + AU'CU est toujours égale à la surface du triangle rectangle ABC, quelle que soit la valeur des côtés de ce triangle.

XLV.

887. **Problème.** Fig. 17. *Sur chacun des côtés d'un hexagone régulier, on décrit une demi-circonférence dont la convexité est tournée du côté du centre de l'hexagone; on demande de calculer l'étendue de la surface* A *comprise entre toutes ces courbes. On sait que le côté de l'hexagone vaut* 8 *mètres.*

Solution. L'angle OUB, moitié de OUI, vaut le tiers de deux angles droits. L'angle OBU = OUB; donc l'angle UOB, supplément de la somme des deux angles OUB + UBO, vaudra pareillement le tiers de deux angles droits.

Il résulte de là, que les triangles UOB, BOC, COS sont

équilatéraux, et l'on a par conséquent BC = OB = OU = 4 *mètres*. Or, les cordes BC, CD, DE, etc., forment un hexagone régulier BCDEHK dont le côté BC=OB = 4 *mètres*, ce qui donnera, en opérant comme au numéro 821,

$$Surf.\ \mathrm{BCDEHK} = 24\sqrt{3}.$$

Le secteur OBMC vaut le sixième du cercle qui a pour rayon OU = 4, ce qui donne

$$Sect.\ \mathrm{OBMC} = \frac{\pi \times 16}{6} = \frac{8\pi}{3};$$

on a de plus (820)

$$Tri.\ \mathrm{OBC} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}, \qquad \text{d'où}$$

$$Segm.\ \mathrm{BMC} = sect.\ \mathrm{OBMC} - tri.\ \mathrm{ABC} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} =$$

$$= \frac{8\pi - 12\sqrt{3}}{3} = \frac{4(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Multipliant par 6, on aura pour les six segments égaux

à BMC $\quad \dfrac{6 \times 4(2\pi - 3\sqrt{3})}{3} = 8(2\pi - 3\sqrt{3}),$

Mais la surface demandée se compose évidemment de l'hexagone BCDEHK moins six segments, tels que BMC, on aura donc

$$Surf.\ \mathrm{A} = \mathrm{BCDEHK} - 6.\mathrm{BMC} = 24\sqrt{3} - 8(2\pi - 3\sqrt{3}) =$$

$$= 16(3\sqrt{3} - \pi) = 32^{mq},87.$$

888. **Corollaire**. *Fig*. 18. Si l'on prenait pour centres les sommets de l'hexagone donné, les arcs de cercle ne se couperaient plus, et la surface demandée serait égal à l'hexagone total, moins six secteurs tels que OBMC. Or, chacun de ces secteurs vaut le tiers d'un cercle qui aurait pour rayon 4 mètres, de sorte que l'on aura

$$Sect.\ \mathrm{OBMC} = \frac{16\pi}{3}.$$

et les six secteurs vaudront ensemble

$$\frac{6 \times 16\pi}{3} = 32\pi.$$

De plus, en opérant comme au numéro 821, on aura

$$Surf. \text{ de l'hexagone} = 96\sqrt{3}.$$

Ainsi on trouvera

$$Surf.\ A' = hexagone - six\ secteurs = 96\sqrt{3} - 32\pi =$$
$$= 32(3\sqrt{3} - \pi) = 65^{mq},74.$$

Il est assez remarquable, que la surface A' est exactement le double de la surface A, que nous avons obtenue pour le problème précédent. On pourra s'exercer à chercher une démonstration générale de cette propriété.

XLVI.

889. **Problème**. Fig. 19. *Le diamètre* AB *d'un cercle vaut* 10 *mètres; on demande quelle doit être la position du point* C, *pour que la surface du cercle soit partagée dans le rapport des nombres* 2 *et* 3 *par l'ensemble des deux demi-circonférences* AOC, CUB.

Solution. Si nous exprimons la quantité AC par x, nous aurons $CB = 10 - x$;

AI, moitié de AC, vaudra $\frac{x}{2}$, et la surface du demi-cercle AOC sera $\frac{\pi \overline{AI}^2}{2} = \frac{\pi \times x^2}{2 \times 4} = \frac{\pi x^2}{8}$.

BH, moitié de BC, sera égal à $\frac{10 - x}{2}$, et la surface du demi-cercle BUC sera

$$\frac{\pi \overline{BH}^2}{2} = \frac{\pi(10-x)^2}{2 \times 4} = \frac{\pi(10-x)^2}{8}.$$

Le diamètre du cercle donné étant égal à 10, son rayon est égal à 5. La surface entière πR^2 est égale à $\pi \times 25$ ou 25π, et chacun des demi-cercles ADB, AEB est égal à $\frac{25\pi}{2}$.

On aura donc

Surf. ADBHCO=*demi-cercle* ADB—*demi-cercle* AOC=

$$=\frac{25\pi}{2}-\frac{\pi x^2}{8}=\frac{\pi(100-x^2)}{8}.$$

On aura également

Surf. AICUBE = *demi-cercle* AEB—*demi-cercle* BUC=

$$=\frac{25\pi}{2}-\frac{\pi(10-x)^2}{8}=\frac{\pi\left[100-(10-x)^2\right]}{8}.$$

Mais, pour satisfaire aux conditions du problème, on doit avoir

$$(\text{AOC}+\text{AICUBE}):(\text{BUC}+\text{ADBHCO})::2:3,$$

qui devient

$$3(\text{AOC}+\text{AICUBE})=2(\text{BUC}+\text{ADBHCO});$$

remplaçant chaque terme par sa valeur trouvée précédemment, on obtient l'équation

$$3\left\{\frac{\pi x^2}{8}+\frac{\pi\left[100-(10-x)^2\right]}{8}\right\}=2\left[\frac{\pi(10-x)^2}{8}+\frac{\pi(100-x^2)}{8}\right],$$

qui, étant résolue, donne

$$x = 4 \text{ mètres}.$$

890. **Corollaire.** On peut se proposer pour exercices, de prouver que les deux surfaces AEBUCO, ADBUCO seront toujours entre elles comme AC : CB, quelle que soit la position du point C sur le diamètre AC.

Ainsi, par exemple, *fig.* 20, si AC est le *tiers* du diamètre AB, la surface AEBUCO sera le tiers du cercle entier, et si les trois parties AC, CC' et C'B sont égales entre

elles, la surface du cercle sera partagée en trois parties égales par les courbes à deux centres AOCUB, AO'C'U'B.

Formules générales.

XLVII.

891. **Définitions**. Si la question proposée est de nature à se répéter souvent dans les applications, il ne sera pas nécessaire de recommencer les raisonnements pour chaque exemple particulier. Il suffira de représenter les quantités connues par des lettres; dans ce cas, les équations que l'on obtient sont dites *littérales* et les expressions algébriques des inconnues se nomment des *formules*.

Ainsi, une formule est l'expression des opérations de calcul ou de compas que l'on doit faire pour obtenir la valeur de l'inconnue.

892. Une formule peut être transformée d'une infinité de manières, et l'on doit s'appliquer surtout à choisir, parmi les formes que l'on peut faire subir à la valeur de l'inconnue, celle qui conduit aux opérations les plus simples. En général, on doit tâcher de diminuer le nombre des termes et des facteurs; il faut chercher à éviter les divisions et les extractions de racines, et faire tout ce qui est possible pour décomposer la formule en facteurs du premier degré, afin de pouvoir employer les logarithmes au calcul de l'inconnue; quelques exemples éclairciront ce qui précède.

XLVIII.

893. **Problème**. *Le côté d'un triangle équilatéral étant* a, *on demande l'expression de la surface que nous désignerons par* S.

Solution. *Fig.* 7, Pl. 22. Soit ABC le triangle proposé, si l'on conçoit la perpendiculaire AD, on aura

$$S = \frac{BC \times AD}{2},$$

exprimant AD par h, on obtient

(1) $$S = \frac{ah}{2};$$

mais le triangle rectangle ABD donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2,$$ qui devient

(2) $$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

cette dernière équation étant résolue, on obtient

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

qui, étant portée dans l'équation (1), donne

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Applications. Si l'on fait $a = 12$, on aura

$$S = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} = 62^{mq},35;$$

si l'on fait $a = 14$, on aura

$$S = \frac{(14)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{196\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3} = 84^{mq},87,$$

résultat conforme à celui que nous avons obtenu au numéro 820.

Corollaire. Si l'on multiplie la formule précédente par 6, on aura

$$6S = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

qui exprime la surface de l'*hexagone régulier* en fonction du côté.

XLIX.

894. **Problème**. *Soit* b *la base et* a *le côté oblique d'un triangle isocèle; on demande la surface.*

Solution. *Fig.* 5, Pl. 22. On aura

(1) $$S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{bh}{2};$$

mais le triangle rectangle ABD donne la relation

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2, \qquad \text{qui devient}$$

(2) $$h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 - b^2}{4},$$

d'où $$h = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2};$$

cette valeur étant substituée dans celle de S, on obtient

$$S = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}.$$

Le binôme $4a^2 - b^2$ exprimant la différence de deux quarrés, on peut le décomposer en facteurs du *premier degré* (702), ce qui donne

(3) $$S = \frac{b\sqrt{(2a + b)(2a - b)}}{4}.$$

Cette dernière transformation permet d'employer les logarithmes: ainsi, on aura

(4) $$log.\,S = log.\,b + \frac{log.(2a + b) + log.(2a - b)}{2} - log.\,4.$$

Applications. Soit $a = 24$ et $b = 15$, on aura

$$2a + b = 48 + 15 = 63,$$
$$2a - b = 48 - 15 = 33,$$

et la formule (3) donnera

$$S = \frac{15\sqrt{63 \times 33}}{4} = \frac{45\sqrt{231}}{4} = 170^{mq},98;$$

la formule (4) donnera

$$log.\ S = 1,17609 + \frac{1,79934 + 1,51851}{2} - 0,60206 =$$

$$= 2,23295 = log.\ 170,98,$$

donc $S = 170^{mq},98.$

Si les nombres donnés sont très-grands, on fera bien d'employer les tables de logarithmes de Callet.

L.

895. **Problème**. *Exprimer la surface d'un triangle rectangle, en fonction de ses côtés.*

Solution. Exprimons les côtés de l'angle droit par b et par c, la surface sera évidemment

$$S = \frac{bc}{2}.$$

Si l'on prenait pour base l'hypoténuse BC, *fig.* 3, Pl. 22, on aurait, en abaissant la perpendiculaire AD,

$$S = \frac{BC \times AD}{2};$$

exprimant BC par a et AD par h, on obtient

(1) $$S = \frac{ah}{2},$$

mais le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2,$$

qui, en exprimant CD par x, devient

$$h^2 = b^2 - x^2;$$

enfin le théorème 426 donne la proportion

$$CD : AC :: AC : CB,$$

ce qui donne $x : b :: b : a,$

d'où $x = \frac{b^2}{a},$

et par conséquent $x^2 = \frac{b^4}{a^2}$,

substituant cette valeur dans l'expression de h^2, on obtient

$$h^2 = b^2 - \frac{b^4}{a^2} = \frac{a^2 b^2 - b^4}{a^2} = \frac{b^2 (a^2 - b^2)}{a^2};$$

mais le triangle ABC étant rectangle, il s'ensuit que $a^2 - b^2 = c^2$, et l'on a

$$h^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} \quad \text{d'où} \quad h = \frac{bc}{a},$$

qui, étant substituée dans l'équation (1), donnera encore

$$S = \frac{bc}{2}.$$

Applications. Soit $a = 40$ *mètres*, et $b = 30$ *mètres*, on aura $c = \sqrt{1600 - 900} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}$,

d'où $S = \frac{bc}{2} = \frac{30 \times 10\sqrt{7}}{2} = 150\sqrt{7} = 396^{mq},86$.

896. **Corrollaire**. Si le triangle était isocèle on aurait

$$c = b, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{b^2}{2}.$$

LI.

897. **Problème**. *Les trois côtés d'un triangle quelconque étant exprimés par* a, *par* b, *et par* c, *on demande l'expression de la surface.*

Solution. *Fig.* 1, Pl. 23. La droite AD étant perpendiculaire sur BC, on aura

$$(1) \qquad S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{ah}{2};$$

le triangle rectangle ABD donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2,$$

qui, en exprimant BD par x, devient

(2) $$h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x);$$

enfin on peut toujours admettre que l'angle B est aigu, et le théorème du numéro 704 donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD,$$

ou, ce qui est la même chose,

(3) $$b^2 = c^2 + a^2 - 2ax.$$

Ainsi, les conditions du problème sont complétement exprimées par l'ensemble des trois équations :

(1) $$S = \frac{ah}{2},$$

(2) $$h^2 = (c+x)(c-x),$$

(3) $$b^2 = c^2 + a^2 - 2ax.$$

L'équation (3) étant résolue, donne

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Cette valeur étant portée dans l'équation (2), on obtient

$$h^2 = \left(c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right) =$$

$$= \left(\frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2a}\right) =$$

$$= \left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right]\left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right] =$$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)\,b-a+c)}{4a^2},$$

d'où $$h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}.$$

Substituant dans l'équation (1), on obtient

$$S = \frac{a\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2 \times 2a} =$$

$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}.$$

Pour simplifier l'expression de cette formule, les géomètres sont convenus d'exprimer le périmètre du triangle par $2p$. Il résulte de cette convention que l'on a

$$\frac{a+b+c}{2}=p,$$

$$\frac{b+c-a}{2}=p-a,$$

$$\frac{a+c-b}{2}=p-b,$$

$$\frac{a+b-c}{2}=p-c.$$

Ces valeurs étant portées dans la formule, on obtient

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Discussion. Si l'on veut exprimer que le triangle est équilatéral on fera $a=b=c$, ce qui donnera

$$2p=a+a+a=3a, \quad \text{d'où} \quad p=\frac{3a}{2};$$

$$(p-a)=(p-b)=(p-c)=\frac{3a}{2}-a=\frac{a}{2},$$

et la formule devient alors

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \quad (893)$$

Si le triangle était rectangle on aurait

$$a^2=b^2+c^2.$$

Pour savoir ce que devient la surface, dans cette hypothèse, il faut reprendre la formule

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4},$$

multiplier *deux* à *deux* les facteurs sous le radical, ce qui donne

$$S = \frac{\sqrt{(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2+2bc-b^2-c^2)}}{4},$$

et remplacer b^2+c^2 par a^2, ce qui donne

$$S = \frac{\sqrt{(a^2+2bc-a^2)(a^2+2bc-a^2)}}{4} = \frac{\sqrt{2bc\times 2bc}}{4} = \frac{bc}{2},$$

résultat conforme à celui que avons obtenu au numéro 895.

Si l'un des nombres exprimés par a, b, c, était plus grand que la somme des deux autres, l'un des facteurs $(p-a)$, $(p-b)$ ou $(p-c)$, deviendrait négatif et la valeur de S étant imaginaire, le triangle serait évidemment *impossible*.

Enfin, si l'un des trois côtés était égal à zéro, les deux autres côtés seraient nécessairement égaux entre eux, et la surface serait nulle.

Ainsi, par exemple, si l'on avait $c=0$, il en résulterait évidemment $a=b$ et l'on aurait

$$S = \frac{\sqrt{(a+a+0)(a+0-a)(a+0-a)(a+a-0)}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2a\times 0\times 0\times 2a}}{4} = 0.$$

898. **Applications.** Soit $a = 100$ *mètres*, $b = 70$ *mètres*, $c = 90$ *mètres*, on aura

$$2p = 100+70+90 = 260$$

$$p = \frac{260}{2} = 130,$$

$$p - a = 130 - 100 = 30$$
$$p - b = 130 - 70 = 60$$
$$p - c = 130 - 90 = 40,$$

et par conséquent

$$S = \sqrt{130 \times 30 \times 60 \times 40} = 600 \sqrt{26} = 3059^{mq},41,$$

résultat conforme à celui que nous avons obtenu au numéro 849.

Si l'on suppose $a = 5^m$, $b = 4^m$, $c = 3^m$, on aura

$2p = 12, p = 6, p - a = 1, p - b = 2, p - c = 3,$

et la formule deviendra

$$S = \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = \sqrt{36} = 6 \textit{ mètres quarrés}.$$

Si l'on veut employer les logarithmes, on aura

$$log. S = \frac{log. p + log. (p - a) + log. (p - b) + log. (p - c)}{2}.$$

899. **Polygones.** Si l'on connaît tous les côtés d'un polygone, avec les diagonales qui aboutissent à un sommet commun, il est facile d'obtenir la surface puisque tout se réduit à faire la somme de tous les triangles qui composent le polygone, après avoir calculé séparément la surface de chacun d'eux.

Ainsi, par exemple, étant donnés, *fig.* 1, Pl. 24,

AB = 10; BC = 12; CD = 15; DO = 9; OA = 16;

AC = 18; AD = 20;

on calculera comme au numéro 898

	surf. ABC =	$56^{mq},57$
	surf. ACD =	129, 76
	surf. ADO =	70, 26
d'où	*surf.* ABCDO =	$256^{mq},59$

LII.

900. **Problème**. *Trouver la formule qui exprime le rayon* R *du cercle cironscrit à un triangle.*

Solution. *Fig.* 2, Pl. 23. Les triangles ABE, ACD étant semblables (851), on aura la proportion

$$AD : AB :: AC : AE,$$

qui devient $h : c :: b : 2R$,

d'où $2Rh = bc$; (1)

mais on a $S = \frac{ah}{2}$;

multipliant l'une de ces équations par l'autre, et réduisant on obtient $2RS = \frac{abc}{2}$ d'où $R = \frac{abc}{4S}$.

LIII.

901. **Problème**. *Trouver la formule qui exprime le rayon du cercle inscrit à un triangle.*

Solution. *Fig.* 3, Pl. 23. En exprimant le rayon cherché par r, on aura

$$\textit{triangle } BUC = \frac{ar}{2},$$

$$\textit{triangle } ACU = \frac{br}{2}, \quad \text{d'où}$$

$$\textit{triangle } ABU = \frac{cr}{2},$$

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = BUC + ACU + ABU,$$

mais $$BUC + ACU + ABU = S,$$

ajoutant et réduisant, on obtient

$$\frac{ar + br + cr}{2} = S, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{2S}{a + b + c};$$

remplaçant $(a + b + c)$ par $2p$, on a

$$r = \frac{2S}{2p} = \frac{S}{p}.$$

LIV.

902. **Problème.** *Exprimer, en fonction des côtés, la surface du quadrilatère inscrit dans un cercle.*

Solution. *Fig.* 2, Pl. 24. Soit $AD = a$; $DC = b$; $CB = d$ et $BA = c$; exprimons la diagonale BD par x, abaissons la droite BP perpendiculaire sur AD, et la droite DN, perpendiculaire sur BC.

Enfin, exprimons BP par h, DN par k, AP par z et CN par u, nous aurons évidemment

$$S = ABD + BCD,$$

mais $$ABD = \frac{ah}{2},$$

$$BCD = \frac{dk}{2},$$

ajoutant ces trois équations, on aura

(1) $$S = \frac{ah + dk}{2}.$$

Il faut, actuellement, trouver les valeurs des deux perpendiculaires h et k.

Le triangle rectangle BPA donnera

$$\overline{BP}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AP}^2, \quad \text{qui devient}$$

(2) $$h^2 = c^2 - z^2 = (c + z)(c - z),$$

et le triangle rectangle DNC donnera

$$\overline{DN}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CN}^2,$$ qui devient

(3) $$k^2 = b^2 - u^2 = (b + u)(b - u).$$

Le quadrilatère ABCD étant inscrit dans un cercle, il s'ensuit que la somme des angles opposés BAP, BCD, vaut deux angles droits (305), d'où il résulte que l'angle BAP = DCN, puisqu'ils ont tous deux le même supplément BCD, donc les triangles rectangles BPA, DNC, sont semblables et l'on a la proportion

$$BA : CD :: AP : CN,$$

qui devient $$c : b :: z : u,$$ d'où

(4) $$cu = bz.$$

Le théorème du numéro 704 étant appliqué au triangle ABD, donnera

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2AD \times AP,$$

qui devient $$x^2 = a^2 + c^2 - 2az,$$ d'où

(5) $$z = \frac{a^2 + c^2 - x^2}{2a}.$$

Le même théorème appliqué au triangle BCD, donne

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + 2CB \times CN,$$

qui devient $$x^2 = b^2 + d^2 + 2du,$$ d'où

(6) $$u = \frac{x^2 - b^2 - d^2}{2d}.$$

Les valeurs que nous venons d'obtenir pour z et pour u, étant substituées dans l'équation (4), on obtient

$$\frac{c(x^2 - b^2 - d^2)}{2d} = \frac{b(a^2 + c^2 - x^2)}{2a},$$

d'où $x^2 = \dfrac{bd(a^2+c^2)+ac(b^2+d^2)}{ac+bd}$;

cette valeur de x^2 étant portée dans l'équation (5), on obtient

$$z = \frac{a^2+c^2 - \dfrac{bd(a^2+c^2)+ac(b^2+d^2)}{ac+bd}}{2a}$$

qui devient $z = \dfrac{c(a^2+c^2-b^2-d^2)}{2(ac+bd)}$.

Cette quantité étant portée dans l'équation (2), on a

$$h^2 = \left[c + \frac{c(a^2+c^2-b^2-d^2)}{2(ac+bd)}\right]\left[c - \frac{c(a^2+c^2-b^2-d^2)}{2(ac+bd)}\right]$$

Transformant, on obtient

$$h^2 = \frac{c^2(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{4(ac+bd)^2},$$

d'où

$$h = \frac{c\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}}{2(ac+bd)}.$$

La valeur obtenue précédemment pour x^2, étant portée dans l'équation (6), on obtient

$$u = \frac{\dfrac{bd(a^2+c^2)+ac(b^2+d^2)}{ac+bd} - b^2 - d^2}{2d},$$

qui devient $u = \dfrac{b(a^2+c^2-b^2-d^2)}{2(ac+bd)}$,

Cette quantité étant portée dans l'équation (3), on a

$$k^2 = \left[b + \frac{b(a^2+c^2-b^2-d^2)}{2(ac+bd)}\right]\left[b - \frac{b(a^2+c^2-b^2-d^2)}{2(ac+bd)}\right]$$

Transformant, on obtient

$$k^2 = \frac{b^2(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{4(ac+bd)^2},$$

d'où

$$k=\frac{b\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}}{2(ac+bd)}.$$

Enfin les valeurs de h et de k étant substituées dans l'équation (1), on obtient après toute réduction

$$S=\frac{\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b(a+b+d-c)(a+b+c-d)}}{4}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a+c+d-b}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)},$$

Si nous exprimons le périmètre $a+b+c+d$ par $2p$, nous aurons

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

LV.

903. **Remarque**. La recherche des formules générales offre un sujet inépuisable d'étude aux personnes qui cultivent les sciences. La géographie, l'astronomie, la physique, la mécanique, etc., conduisent à une foule de questions qui, résolues une fois pour toutes, concourent elles-mêmes à la solution de questions nouvelles; c'est pourquoi j'engage le lecteur à continuer lui-même ce genre de travail, qui sera pour lui une préparation utile à l'étude des parties plus élevées des mathématiques. Je me contenterai, pour le moment, d'indiquer encore quelques sujets d'exercices.

LVI.

904. **Polygones réguliers**. On peut exprimer par des formules les côtés de tous les polygones réguliers que l'on sait inscrire dans le cercle.

Ainsi, par exemple, en désignant le rayon par R, et le côté du polygone régulier inscrit par C, on aura

POLYGONES INSCRITS.	COTÉS EN FONCTION DU RAYON.
Quarré.	$C = R\sqrt{2}.$
Octogone.	$C = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$
Triangle.	$C = R\sqrt{3}.$
Hexagone	$C = R.$
Dodécagone	$C = \frac{R(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}.$
Décagone	$C = \frac{R(-1+\sqrt{5})}{2}.$
Pentagone.	$C = \frac{R\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2}.$

On pourra s'exercer aussi, à chercher l'apothème et la surface de chacun de ces polygones.

Rapports numériques.

LVII.

905 **Définition**. Une des questions les plus utiles pour les applications mathématiques, c'est la recherche des rapports numériques.

Nous avons déjà dit, au n° 357, comment on peut trou-

ver graphiquement le rapport qui existe entre deux quantités données ; mais cette manière d'opérer ne peut être admise qu'à défaut de méthodes plus rigoureuses, déduites de la définition géométrique des quantités que l'on compare.

En général, on doit chercher à exprimer les deux quantités proposées, en fonction d'une troisième, qui disparaît lorsque l'on divise l'une des quantités par l'autre pour obtenir leur rapport. Mais souvent aussi, l'une des deux quantités données peut être prise pour terme de comparaison ; ce qui dispense d'employer une commune mesure auxiliaire. Nous allons éclaircir ces principes par quelques exemples.

LVIII.

906. **Problème.** *Trouver le rapport numérique entre la diagonale et le côté du quarré.*

Solution. Si nous exprimons la diagonale par D, et le côté par C, nous aurons

$$D^2 = 2C^2, \text{ d'où } D = C\sqrt{2}.$$

Divisant les deux membres par C, nous aurons pour le rapport numérique

$$\frac{Diag.}{Côté} = \frac{D}{C} = \sqrt{2} = 1{,}41420.$$

On peut donner au résultat la forme d'une proportion ; ainsi on dira

$$Diag. : côté :: \sqrt{2} : 1,$$

ou, *approximativement*,

$$D : C :: 14 : 10 :: 141 : 100 :: 1414 : 1000, \text{ etc.}$$

907. **Remarque.** Les rapports numériques étant destinés aux applications, doivent être, en général, calculés avec une grande exactitude. Chacun prend ensuite le

nombre de chiffres décimaux nécessaires, suivant la question particulière dont il s'occupe.

LIX.

908. **Problème**. *Un cercle et un quarré ont le même contour, on demande le rapport numérique de leurs surfaces.*

Solution. Si nous désignons le côté du quarré par C, l'expression algébrique du rapport demandé sera

$$\frac{Cercle}{Quarré}=\frac{\pi R^2}{C^2}.$$

Mais, puisque la circonférence du cercle est égale au périmètre du quarré, on doit avoir

$$2\pi R = 4C,$$

ce qui donne $$R=\frac{2C}{\pi},$$

et par conséquent $$R^2=\frac{4C^2}{\pi^2};$$

cette valeur de R^2 étant portée dans l'équation (1) on obtient pour le rapport numérique demandé

$$\frac{cercle}{quarré}=\frac{\pi\times 4C^2}{C^2\times\pi^2}=\frac{4}{\pi}=1,27324.$$

Ainsi l'on voit, qu'à égalité de contour, la surface du cercle est beaucoup plus grande que celle du quarré.

LX.

909. **Problème**. *Un cercle et un quarré ont la même étendue en surface; on demande le rapport numérique de leurs contours.*

Solution. L'expression algébrique du rapport demandé sera

$$(1)\qquad \frac{\textit{circonf. cercle}}{\textit{périm. quarré}} = \frac{2\pi R}{4C} = \frac{\pi R}{2C}.$$

Mais puisque les deux surfaces sont équivalentes, on a

$$\pi R^2 = C^2,$$

ce qui donne $$R = \frac{C}{\sqrt{\pi}} = \frac{C\sqrt{\pi}}{\pi}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (1) on obtient

$$\frac{\textit{circonf.}}{\textit{périm.}} = \frac{\pi \times C\sqrt{\pi}}{2C \times \pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}88622.$$

LXI.

910. **Problème**. *Trouver le rapport numérique entre la circonférence du cercle et le contour du triangle équilatéral inscrit.*

Solution. Le côté du triangle inscrit est égal a $R\sqrt{3}$ (904), par conséquent le contour vaut $3R\sqrt{3}$, mais la circonférence du cercle vaut $2\pi R$, ainsi on aura, pour le rapport numérique,

$$\frac{\textit{circonf.}}{\textit{périm.}} = \frac{2\pi R}{3R\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} = 1{,}20920.$$

LXII.

911. **Problème**. *Trouver le rapport numérique entre la surface du cercle et celle de l'hexagone régulier circonscrit.*

Solution. Si nous exprimons par C le côté de l'hexagone la surface sera $\frac{6C \times R}{2} = 3CR$,

le triangle rectangle AOD, *fig.* 8, Pl. 22, donne

$$\overline{AO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{AD}^2,$$

qui, dans le cas actuel devient

$$C^2 = R^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad C = \frac{2R}{\sqrt{3}};$$

ainsi on a

$$\textit{surf. hexagone} = \frac{3R \times 2R}{\sqrt{3}} = \frac{6R^2}{\sqrt{3}},$$

mais la surface du cercle étant πR^2, on obtient pour le rapport demandé

$$\frac{\textit{cercle}}{\textit{hexag.}} = \pi R^2 : \frac{6R^2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,90690.$$

LXIII.

912. **Problème.** *Trouver le rapport numérique entre les surfaces des cercles inscrits et circonscrits au décagone régulier.*

Solution. *Fig.* 16, Pl. 22. Le rayon du cercle circonscrit étant exprimé par R, on a, pour le côté BC du décagone,

$$C = \frac{R(-1 + \sqrt{5})}{2}, \qquad (904)$$

mais le triangle rectangle ABD, donne la relation

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2;$$

en exprimant le rayon AD du cercle inscrit par r, et remarquant que $BD = \frac{BC}{2} = \frac{C}{2}$,

on obtient $r^2 = R^2 - \frac{R^2(-1+\sqrt{5})^2}{16}$,

d'où $r^2 = \frac{R^2(5+\sqrt{5})}{8}$,

on aura donc pour le rapport demandé

$$\frac{\textit{cercle circons.}}{\textit{cercle inscrit}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2 \times 8}{R^2(5+\sqrt{5})} = \frac{8(5-\sqrt{5})}{20} =$$

$$= \frac{2(5-\sqrt{5})}{5} = 1{,}10558.$$

LXIV.

913. **Problème.** *Trouver le rapport numérique entre le secteur de* 48 *degrés, dans un cercle dont le rayon vaut* 15 *mètres, et le secteur de* 60 *degrés, dans un cercle dont le rayon vaut* 8 *mètres.*

Solution. Si nous exprimons le premier secteur par S, et le second par S′, nous aurons (618)

$$360 : 48 :: \pi(15)^2 : sect.\ S,$$

$$360 : 60 :: \pi\ (8)^2 : sect.\ S'.$$

La première proportion donne

(1) $360S = 48\pi(15)^2$;

la seconde proportion donne

(2) $360S' = 60\ \pi(8)^2$;

divisant l'équation (1) par (2) on obtient

$$\frac{sect.\ S}{sect.\ S'} = \frac{48 \times 225\pi}{60 \times 64\pi} = \frac{45}{16} = 2{,}81250.$$

LXV.

914. **Polygones réguliers.** En divisant par R chacune des équations obtenues au numéro 904, on aura le rapport

numérique entre le côté du polygone régulier correspondant et le rayon du cercle circonscrit.

POLYGONES INSCRITS.	RAPPORTS NUMÉRIQUES DES CÔTÉS AU RAYON.	
Quarré.. . . .	$\frac{C}{R}=\sqrt{2}$	$= 1,41420$
Octogone . . .	$\frac{C}{R}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$= 0,76537$
Triangle.. . .	$\frac{C}{R}=\sqrt{3}$	$= 1,73205$
Hexagone. . .	$\frac{C}{R}=1$	$= 1,00000$
Dodécagone. .	$\frac{C}{R}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	$= 0,51764$
Décagone. . .	$\frac{C}{R}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$= 0,61803$
Pentagone. ..	$\frac{C}{R}=\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2}$	$= 1,17557$

915. **Corollaire.** En multipliant chacun de ces nombres par R, on aura le côté du polygone régulier correspondant.

Ainsi, pour le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon serait 18 mètres, on aurait

$$C = 18 \times 1,17557 = 21^{m},16.$$

LXVI.

916. **Rapport numérique de la circonférence au diamètre.** Dans toutes les questions relatives à la circonférence et à la surface du cercle, nous avons fait usage du facteur π, qui exprime le rapport numérique de la circonférence au diamètre.

Nous avons admis pour ce nombre, la valeur obtenue par les géomètres qui se sont occupés de cette importante question. Mais nous ne pouvions pas exposer les moyens par lesquels on a calculé ce rapport, avant d'avoir établi les relations qui existent entre le cercle et les polygones inscrits ou circonscrits.

Parmi toutes les méthodes employées pour calculer le nombre π, nous choisirons la plus élémentaire, ce qui suffira pour faire comprendre par quelle série d'opérations on a dû passer pour obtenir le résultat. Nous commencerons par résoudre la question suivante.

917. **Problème.** *Étant données les surfaces* p *d'un polygone régulier inscrit, et* P *d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces* p' *et* P' *des polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un nombre de côtés double.*

Solution. Nous remarquerons d'abord, *fig.* 3, que si dans un polygone régulier on construit les deux rayons OA, OB, on formera un triangle isocèle qui sera compris dans le polygone total autant de fois que l'angle AOB est compris dans quatre angles droits. Or, si l'on exprime par n le nombre des côtés du polygone, l'angle AOB sera la n^{me} partie de 4 angles droits, et le triangle AOB sera la n^{me} partie du polygone.

Par conséquent, si l'on trace la perpendiculaire OD,

le triangle AOD, *moitié* de AOB, sera égal au polygone entier divisé par $2n$.

D'après cela, supposons, *fig.* 4, que AB soit le côté du polygone inscrit p', et que HK soit le côté du polygone circonscrit P, la corde AC sera le côté du polygone inscrit p', et si l'on trace les deux tangentes AM, NB, on aura MN pour le côté du polygone circonscrit P'.

De plus, chacun des angles AOC, MON, étant égal à la $2n^{me}$ partie de 4 angles droits, il s'ensuit que l'on a

$$\textit{triangle}\ \text{AOD} = \frac{p}{2n};\ \textit{triangle}\ \text{HOC} = \frac{\text{P}}{2n};$$

$$\textit{triangle}\ \text{AOC} = \frac{p'}{2n};\ \textit{triangle}\ \text{MON} = \frac{\text{P}'}{2n}.$$

Ces notations étant admises, nous remarquerons que les deux triangles AOD, AOC, ont pour hauteur commune la droite AD, donc ils sont entre eux comme leurs bases, ce qui donne la proportion

$$\text{AOD} : \text{AOC} :: \text{OD} : \text{OC}.$$

Le parallélisme des droites AD, HC, donne la proportion

$$\text{OD} : \text{OC} :: \text{OA} : \text{OH}.$$

Enfin, les deux triangles AOC, HOC, ayant leurs bases OA, OH, sur la même droite, et le sommet commun C, ils ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases, ce qui donne

$$\text{OA} : \text{OH} :: \text{AOC} : \text{HOC}.$$

Multipliant les trois proportions, et réduisant, on obtient

$$\text{AOD} : \text{AOC} :: \text{AOC} : \text{HOC}.$$

Remplaçant chaque terme par sa valeur, on a

$$\frac{p}{2n} : \frac{p'}{2n} :: \frac{p'}{2n} : \frac{\text{P}}{2n},$$

ou $$p : p' :: p' : P,$$

ce qui donne $$p'^2 = Pp,$$ et par conséquent

(1) $$p' = \sqrt{Pp}.$$

Pour obtenir P', on remarquera d'abord que les deux triangles HOM, MOC, ayant pour hauteur commune la droite OC, sont entre eux comme leurs bases, ce qui donne la proportion

HOM : MOC :: HM : MC;

mais la droite OM divise l'angle HOC en deux parties égales, et l'on a par conséquent (376)

HM : MC :: HO : OC.

On peut remplacer OC par son égal AO, ce qui donne HO : OC :: HO : AO.

Le parallélisme des droites HC, AD, donne

HO : AO :: CO : DO.

Enfin, les deux triangles AOC, AOD, ayant même hauteur, on a CO : DO :: AOC : AOD.

Multipliant toutes ces proportions, et réduisant, on obtient HOM : MOC :: AOC : AOD,

d'où en composant

(HOM + MOC) : 2MOC :: (AOC + AOD) : 2AOD,

qui devient

HOC : MON :: (AOC + AOD) : 2AOD.

Remplaçant chaque terme par sa valeur, on a

$$\frac{P}{2n} : \frac{P'}{2n} :: \frac{p+p'}{2n} : \frac{2p}{2n},$$ d'où

$$P : P' :: p + p' : 2p,$$ ce qui donne

$$(2) \qquad P' = \frac{2Pp}{p+p'} = \frac{2Pp}{p + \sqrt{Pp}}.$$

918. **Corollaire.** Les formules (1) et (2) permettent de calculer les deux polygones p' et P' lorsque l'on connaît les polygones p et P.

Or, si nous concevons un cercle dont le rayon serait 1, le quarré inscrit sera 2 et le quarré circonscrit sera 4. Par conséquent, si dans les formules (1) et (2) on remplace p par 2 et P par 4, les quantités p' et P' exprimeront les surfaces des octogones réguliers, inscrits et circonscrits.

En effectuant les calculs, on trouvera

$$p' = \sqrt{2 \times 4} = 2{,}82842,$$

$$P' = \frac{2 \times 2 \times 4}{2 + \sqrt{2 \times 4}} = 3{,}31370.$$

Si actuellement, et *dans les mêmes formules*, on remplace p et P par les deux nombres que nous venons de trouver, on obtiendra les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit de 16 côtés.

En effectuant les calculs, on trouvera

$$p' = 3{,}06146 \; ; \; P' = 3{,}18259.$$

Ces deux polygones de 16 côtés serviront ensuite à calculer ceux de 32; ces derniers donneront les polygones de 64, et ainsi de suite.

Voici le résultat du calcul prolongé jusqu'à ce que les cinq premiers chiffres décimaux soient communs aux deux polygones.

NOMBRE DES CÔTÉS.	POLYGONES INSCRITS.	POLYGONES CIRCONSCRITS.
4	2,00000	4,00000
8	2,82842	3,31370
16	3,06146	3,18259
32	3,12144	3,15172
64	3,13654	3,14411
128	3,14033	3,14222
256	3,14127	3,14175
512	3,14151	3,14163
1024	3,14157	3,14160
2048	3,14158	3,14159
4096	3,14159	3,14159

Si l'on inscrit successivement dans un cercle des polygones de 4, 8, 16, 32, etc., côtés, on remarquera, *fig.* 5, 1° que ces polygones augmenteront en surface à mesure que l'on augmentera le nombre de leurs côtés; 2° que leur différence avec le cercle deviendra de plus en plus petite.

Si au contraire on circonscrit au même cercle des polygones de 4, 8, 16, 32, etc., ils s'approcheront encore du cercle, mais leur surface diminuera d'autant plus qu'ils auront un plus grand nombre de côtés.

Ces résultats sont mis en évidence par le tableau précédent, dans lequel on voit les deux polygones se rapprocher à mesure que l'on augmente le nombre de leurs côtés; mais comme le cercle est toujours compris entre eux, il

s'ensuit évidemment que si l'on prend l'un de ces deux polygones pour la surface du cercle, l'erreur sera toujours plus petite que la différence qui existe entre eux.

Ainsi, par exemple, les deux polygones inscrit et circonscrit de 4096 côtés ne différant que dans les chiffres décimaux inférieurs aux *cent-millièmes*, on doit en conclure que le nombre 3,14159 exprime la surface du cercle *à moins d'une unité décimale du cinquième ordre.*

Notre but ici étant seulement de faire comprendre le principe, nous n'avons pas conservé les chiffres décimaux au delà du cinquième; mais en consultant les ouvrages spéciaux, on trouvera le nombre cherché, calculé jusqu'au *cent quarantième chiffre décimal*, ce qui excède de beaucoup les besoins de l'application.

919. **Cor.** II. Si nous exprimons par la lettre π le nombre que nous venons d'obtenir, et par s la surface du cercle qui a *l'unité pour rayon*, nous aurons

$$s = \pi$$

Exprimons actuellement par C la circonférence, et par R le rayon d'un cercle quelconque, la surface S de ce dernier cercle sera $\frac{CR}{2}$, (614)

mais les surfaces des cercles sont comme les quarrés des rayons (632), on aura donc

$$s : S :: (1)^2 : R^2,$$

qui devient en remplaçant s et S par leurs valeurs

$$\pi : \frac{CR}{2} :: 1 : R^2,$$

d'où $$\pi = \frac{CR}{2R^2} = \frac{C}{2R} = \frac{\textit{circonférence}}{\textit{diamètre}}$$

Ainsi, le nombre π que nous venons de trouver en

cherchant la surface d'un cercle dont le rayon = 1, exprime en même temps *le rapport numérique de la circonférence au diamètre pour un cercle quelconque.*

CHAPITRE IV.

Trigonométrie rectiligne.

I.

920. **Définitions.** La trigonométrie est la plus belle application que l'on ait faite des rapports numériques. Cette partie des mathématiques a principalement pour but d'exprimer les relations qui existent entre les angles et les côtés des figures.

Les propriétés des lignes proportionnelles et du triangle rectangle, nous ont permis de résoudre toutes les questions qui dépendent du parallélisme et de la perpendicularité des lignes; mais jusqu'ici nous n'avons pas introduit les angles dans le calcul. En effet, les côtés et les angles n'étant pas des quantités de même nature, il n'y avait pas moyen de les combiner directement.

On avait eu d'abord la pensée d'employer les rapports qui existent entre les côtés et les cordes des arcs de cercles qui servent de mesure aux angles; mais les inclinaisons de ces cordes dans tous les sens ont dû faire renoncer à ce dernier moyen, et l'on a fini par adopter les méthodes que nous allons développer.

II.

921. **Lignes trigonométriques.** Un angle MOX, *fig.* 6, peut toujours être considéré comme provenant du mouvement d'une droite MO, qui se serait écartée d'une autre droite OX, en tournant autour d'un point commun, et, dans ce cas, il faut distinguer le *côté mobile* de celui qui est resté en place.

Par la même raison, l'arc XM qui sert de mesure à l'angle, sera engendré par un *point mobile* qui se meut en partant du point X pour arriver en M. Nous dirons donc que le point X est le commencement ou *l'origine* de l'arc XM, tandis que le point M en est *l'extrémité*.

Concevons actuellement, *fig.* 7, un cercle partagé en quatre parties égales par les deux diamètres XX', YY'.

Nous pourrons toujours supposer que la circonférence est engendrée par le mouvement d'un point qui, en partant du point X, aurait tourné dans le sens indiqué par la flèche.

Pour cette raison, le point X se nommera *l'origine des arcs*.

Le point Y sera *l'origine des compléments*, parce que le complément d'un arc est sa différence avec un *quadrant* ou un quart de circonférence (57).

Ainsi, par exemple, si nous supposons que le point générateur soit arrivé en M, *fig.* 7, il aura décrit un arc XM qui aura pour complément YM.

Le point M sera *l'extrémité* commune à l'arc XM et à son complément YM.

Lorsque le point générateur sera parvenu en M', *fig.* 8, l'arc parcouru sera XYM', son complément sera YM'.

Enfin, si le point générateur était arrivé en M'', *fig.* 9,

l'arc serait XYX'M", et son complément YX'M", ainsi de suite.

Les conventions précédentes étant admises, on comprendra facilement les définitions des lignes trigonométriques.

Concevons, *fig.* 7, la circonférence qui a pour centre le point O.

Nous donnerons à cette circonférence le nom de *cercle trigonométrique*, et nous pourrons toujours supposer que le sommet de l'angle donné XOM, a été transporté au centre O du cercle, ou que l'on a transporté le centre du cercle sur le sommet de l'angle donné.

On doit toujours admettre aussi, que l'on a fait passer l'un des côtés de l'angle donné par le point qui représente l'origine des arcs, de sorte que le second côté contient le point M, qui est l'extrémité de l'arc XM.

Cela revient à considérer l'angle XOM comme produit par le mouvement du côté OM, qui se serait écarté du côté immobile OX. D'après cela nous dirons

922. *Le* **sinus** *d'un angle ou de l'arc trigonométrique, compris entre les côtés de cet angle, est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cet arc, sur le diamètre qui passe par l'origine.*

Ainsi, la perpendiculaire MP sera le sinus de l'angle XOM ou de l'arc XM.

923. *La* **tangente** *d'un angle ou d'un arc doit toucher cet arc à l'origine, et se compte depuis ce point jusqu'à celui où elle rencontre le prolongement du rayon mobile* OM.

Ainsi la droite XU sera la tangente de l'angle XOM, ou de l'arc XM.

924. Il est très-important de remarquer que toutes les tangentes *trigonométriques* doivent toucher l'arc à son origine, et qu'elles diffèrent essentiellement des tangentes

géométriques, que nous avons toujours considérées comme infinies.

925. *La* **sécante** *d'un angle ou d'un arc se compte sur le rayon mobile depuis le centre jusqu'au point où ce rayon prolongé rencontre la tangente.*

Ainsi la droite OU est la sécante de l'angle XOM ou de l'arc XM.

926. On remarquera encore que la sécante *trigonométrique* est une droite déterminée quant à sa longueur, et qu'elle aboutit toujours au centre, tandis que les sécantes *géométriques* sont infinies et peuvent traverser le cercle de toutes les manières.

III.

927. **Notation.** Pour simplifier l'expression des formules, nous désignerons par une seule lettre, l'angle ou l'arc *trigonométrique* compris entre ses côtés, ainsi nous dirons angle XOM = arc XM = a,
angle YOM = arc YM = b.

Enfin, au lieu de *sinus*, *tangente*, *sécante*, on écrit *sin. tang. séc.*, ainsi on aura

MP = sin. XOM = sin. XM = sin. a,
XU = tang. XOM = tang. XM = tang. a,
OU = séc. XOM = séc XM = séc. a.

Si nous appliquons les définitions précédentes à l'angle YOM, en prenant Y pour origine de l'arc YM, nous aurons

MQ = sin. YOM = sin. YM = sin. b,
YV = tang. YOM = tang. YM = tang. b,
OV = séc. YOM = séc. YM = séc. b.

Or, l'angle b étant le complément de l'angle a, on a

sinus b = sinus du complément de a,
tangente b = tangente du complément de a,
sécante b = sécante du complément de a;

mais, pour abréger on est convenu de dire

MQ = cosinus a = cos. a,
YV = cotangente a = cot. a,
OV = cosécante a = coséc. a.

Ainsi en résumant, on aura

MP = sin. a.	MQ = cos. a.
XU = tang. a.	YV = cot a.
OU = séc. a.	OV = coséc. a.

Pour exprimer le quarré du sinus, du cosinus ou de la tangente de a, on écrit $sin.^2 a$, $cos.^2 a$, $tang.^2 a$.

928. **Remarque.** Souvent, pour ne pas tracer la droite MQ, on compte le cosinus depuis le centre jusqu'au pied du sinus, ainsi on aura

OP = QM = cos. a.

Par la même raison, on pourra dire

QO = MP = sin a.

IV.

929. **Discussion.** Les définitions précédentes s'appliquent à tous les arcs quelle que soit leur grandeur; il faut seulement remarquer que les sinus et les tangentes seront positives toutes les fois qu'elles seront au-dessus du diamètre XX′, et négatives, lorsqu'elles seront au-dessous. Les cosinus et cotangentes seront positifs à droite du diamètre YY′, et négatifs, lorsqu'ils seront à gauche.

Il résulte de cette convention, que pour l'arc XM, *fig.* 7, toutes les lignes trigonométriques seront positives.

Mais s'il s'agissait de l'arc XYM′, *fig.* 8, son complément serait YM′, et l'on aurait alors

sinus M′P′ *positif*, cosinus M′Q′ *négatif*,
tangente XU′ *négative*, cotangente YV′ *négative*.

Pour l'arc XYX'M″, *fig.* 9, le complément sera YX'M″, et l'on aura

sinus M″P″ *négatif*, cosinus M″Q″ *négatif*,
tangente XU″ *positive*, cotangente YV″ *positive*.

Enfin, l'arc XYX'Y'M‴, *fig.* 10, aura pour complément YX'Y'M‴, et l'on aura

sinus M‴P‴ *négatif*, cosinus M‴Q‴ *positif*,
tangente XU‴ *négative*, cotangente YV‴ *négative*.

930. Quant à la sécante, elle est toujours formée par le rayon mobile ou par son prolongement. Dans le premier cas, elle sera *positive*, et dans le second, *négative*. Ainsi, lorsque l'extrémité de l'arc sera situé dans le premier ou le quatrième quadrant, la sécante sera positive; dans le second et le troisième quadrant, elle sera négative.

Par la même raison, la cosécante sera *positive* dans le premier et le second quadrant, tandis qu'elle sera *négative* dans le troisième et dans le quatrième.

On remarquera encore que si l'angle que l'on considère était réduit à zéro, on aurait

$$\sin. = 0;\ \cos. = R;\ \text{tang.} = 0;\ \cot. = \infty.$$

Si l'angle $= 90°$, on aura

$$\sin. = R;\ \cos. = 0;\ \text{tang.} = \infty;\ \cot. = 0.$$

Pour 180°, on aura

$$\sin. = 0;\ \cos. = -R;\ \text{tang.} = 0;\ \cot. = -\infty.$$

Enfin, pour 270°, on aura

$$\sin. = -R;\ \cos. = 0;\ \text{tang.} = -\infty;\ \cot. = 0.$$

Formules trigonométriques.

V.

931. **Problème**. *Exprimer le sinus d'un arc en fonction du cosinus, et réciproquement.*

Solution. *Fig*. 7. Le triangle rectangle OPM donne

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2.$$

Si nous exprimons par a l'angle XOM ou l'arc XM, l'équation précédente deviendra

(1) $$\sin.^2 a + \cos.^2 a = R^2;$$

on en déduit

(2) $$\sin. a = \sqrt{R^2 - \cos.^2 a} = \sqrt{(R + \cos. a)(R - \cos. a)},$$

(3) $$\cos. a = \sqrt{R^2 - \sin.^2 a} = \sqrt{(R + \sin. a)(R - \sin. a)}.$$

VI.

932. **Problème**. *Exprimer les relations qui existent entre les lignes trigonométriques d'un angle ou d'un arc* a.

Solution. *Fig*. 7. Les deux triangles rectangles OPM, OXU étant semblables, on a la proportion

$$OP : PM :: OX : XU,$$

qui devient $\cos. a : \sin. a :: R : \text{tang}. a$, d'où

(4) $$\text{tang}. a = \frac{R \sin. a}{\cos. a}.$$

Les mêmes triangles donneront

$$OP : OM :: OX : OU,$$

qui devient $\cos. a : R :: R : \text{séc}. a$, d'où

(5) $$\text{séc}. a = \frac{R^2}{\cos. a}.$$

Les triangles semblables OQM, OYV donneront

$$OQ : QM :: OY : YV,$$

qui devient $\sin. a : \cos. a :: R : \cot. a$, d'où

(6) $$\cot. a = \frac{R \cos. a}{\sin. a}.$$

La comparaison des mêmes triangles donnera

$$OQ : OM :: OY : OV,$$

qui devient $\sin. a : R :: R : \text{coséc.}\ a,$ d'où

(7) $$\text{coséc.}\ a = \frac{R^2}{\sin.\ a}.$$

933. **Corollaire.** Il résulte des formules précédentes que toutes les fois que le sinus et le cosinus auront le même signe, la tangente et la cotangente auront le signe +, tandis que ces deux lignes auront le signe — quand le sinus et le cosinus auront des signes contraires.

Quant à la sécante, elle aura toujours le signe du cosinus, et la cosécante aura le signe du sinus. Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons exposés au numéro 930.

VII.

934. **Problème.** *Connaissant les sinus et les cosinus de deux arcs, on demande les sinus et les cosinus de leur somme et de leur différence.*

Solution. *Fig.* 11. Nous remarquerons d'abord que pour ajouter deux arcs il faut placer l'un d'eux à la suite de l'autre, de sorte que si nous exprimons XM par a et MN par b, nous aurons $XN = a + b$.

Pour retrancher un arc d'un autre, au contraire, il faut supposer que le point générateur, après avoir engendré le premier, est revenu sur ses pas, jusqu'à ce qu'il ait parcouru la valeur du second arc. Ainsi, en traçant la corde NN′ perpendiculaire sur le rayon OM, nous aurons $XN' = XM - MN' = XM - MN = a - b$.

Ces principes étant admis, traçons les droites NH, IV, MP et N′H′ perpendiculaires sur OX, et les droites IK, N′S, perpendiculaires sur OY.

Les triangles OVI, OPM, seront semblables, et donneront la proportion

$$OM : OI :: MP : IV,$$

qui devient $R : \cos. b :: \sin a : IV,$

d'où $IV = \frac{\sin. a \cos. b}{R}.$

Les triangles OMP, NIK seront semblables, comme ayant les côtés perpendidulaires, chacun à chacun, et l'on aura la proportion

$$OM : NI :: OP : NK,$$

qui devient $R : \sin b :: \cos a : NK,$

d'où $NK = \frac{\sin. b \cos. a}{R}.$

Mais, puisque l'arc $XN = (a+b)$, on a

$$\sin. (a + b) = NH = NK + KH = NK + IV;$$

remplaçant NK et IV par leurs valeurs trouvées précédemment, on obtient

$$(8) \qquad \sin. (a + b) = \frac{\sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a}{R}.$$

Le parallélisme des droites KI, SN', donne

$$IU = KS = NK;$$

on aura pareillement

$$VH' = VH = N'U = IK.$$

Mais l'arc XN' étant égal à $(a - b)$, on aura

$$\sin. (a - b) = N'H' = UV = IV - IU = IV - NK;$$

remplaçant IV et NK par leurs valeurs, on obtient

$$(9) \qquad \sin. (a - b) = \frac{\sin. a \cos. b - \sin. b \cos. a}{R}.$$

Les triangles semblables OVI, OPM, donnent la proportion OM : OI :: OP : OV,
qui devient R : cos. b :: cos. a : OV,

d'où
$$OV = \frac{\cos. a \cos. b}{R}.$$

Les triangles semblables OPM, NIK, donneront
OM : NI :: MP : IK,
qui devient R : sin. b :: sin a : IK,

d'où
$$IK = \frac{\sin. a \sin. b}{R}.$$

Mais on a
$$\cos. (a + b) = OH = OV - VH = OV - IK;$$
remplaçant OV et IK par leurs valeurs, on obtient
$$(10) \quad \cos. (a + b) = \frac{\cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b}{R}.$$

Enfin on a
$$\cos. (a - b) = OH' = OV + VH' = OV + IK,$$
et par conséquent
$$(11) \quad \cos. (a - b) = \frac{\cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b}{R}.$$

VIII.

935. **Problème**. *Le sinus et le cosinus d'un arc étant donnés, trouver le sinus et le cosinus de l'arc double.*

Solution. Les formules (8) et (10) étant indépendantes des valeurs particulières de a et de b, doivent satisfaire au cas particulier où ces deux arcs seraient égaux ; ce qui donnerait alors
$$\sin. (a + a) = \frac{\sin. a \cos. a + \sin. a \cos. a}{R},$$
$$\cos. (a + a) = \frac{\cos. a \cos. a - \sin. a \sin. a}{R},$$

d'où, en réduisant

$$(12)\qquad \sin.\, 2a = \frac{2 \sin.\, a \cos.\, a}{R},$$

$$(13)\qquad \cos.\, 2a = \frac{\cos.^2 a - \sin.^2 a}{R}.$$

IX.

936. **Problème.** *Le sinus et le cosinus d'un arc étant donnés, trouver le sinus et le cosinus de l'arc moitié.*

Solution. L'équation (13) étant multipliée par R et renversée, devient

$$\cos.^2 a - \sin.^2 a = R \cos.\, 2a.$$

L'équation (1) nous donne

$$\cos.^2 a + \sin.^2 a = R^2.$$

Retranchons la première équation de la deuxième, nous aurons

$$2 \sin.^2 a = R^2 - R \cos.\, 2a.$$

Si au contraire nous faisons la somme, nous obtenons

$$2 \cos.^2 a = R^2 + R \cos.\, 2a.$$

Ces équations, vraies pour l'arc a, seront également vraies pour tout autre arc a', ce qui donne

$$2 \sin.^2 a' = R^2 - R \cos.\, 2a',$$

$$2 \cos.^2 a' = R^2 + R \cos.\, 2a'.$$

Enfin il est permis de supposer que a est égal à $2a'$,

d'où $$a' = \frac{a}{2},$$

ce qui donnera $2 \sin.^2 \frac{a}{2} = R^2 - R \cos.\, a,$

$$2 \cos.^2 \frac{a}{2} = R^2 + R \cos.\, a,$$

et par conséquent

$$(14) \qquad \sin.\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{R^2-R\cos.a}{2}},$$

$$(15) \qquad \cos.\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{R^2+R\cos.a}{2}}.$$

X.

937. **Sinus et cosinus du supplément d'un arc.** Le supplément d'un angle ou d'un arc trigonométrique n'est pas la même chose qu'en géométrie. Ainsi, par exemple, si l'on ne considérait que la grandeur absolue, on pourrait dire que l'arc X'M ; *fig.* 15, est le supplément de XM. Mais lorsqu'on exprime une relation de position, il faut avoir égard au sens de la génération de l'arc. Or, pour que deux angles a et b soient suppléments l'un de l'autre,

on doit avoir $\qquad a+b=180°,$

d'où $\qquad b=180°-a.$

Ainsi le supplément de XM sera 180 — XM. C'est-à-dire qu'après avoir compté 180 à partir du point X, il faudra retrancher X'M' = XM, ce qui donnera

Supplém. XM = 180° — XM = 180 — X'M' = XM'.

Donc le supplément de XM sera XM'. Or, on a

$$MP = M'P',$$

d'où l'on conclura que deux arcs suppléments l'un de l'autre ont des sinus égaux et de même signe ; mais on a

$$\cos. XM = MQ,$$
$$\cos. XM' = M'Q.$$

Donc, lorsque deux arcs sont suppléments l'un de l'autre, leurs cosinus sont égaux, mais de signes contraires.

Les formules des numéros (9) et (11) conduisent au

même résultat. En effet, si dans la première on fait $a = 180°$, on aura

$$\sin.(180° - b) = \frac{\sin.180 \cos.b - \sin.b \cos.180°}{R} =$$

$$= \frac{0 \times \cos.b - \sin.b \times (-R)}{R} = \sin.b,$$

d'où *sin. supplém.* de $b = \sin.b$.

La seconde formule donne

$$\cos.(180° - b) = \frac{\cos.180 \cos.b + \sin.180 \sin.b}{R} =$$

$$= \frac{-R \cos.b + 0 \sin.b}{R} = -\cos.b,$$

d'où *cos. supplém.* de $b = -\cos.b$.

XI.

938. **Remarque**. Nous pourrions continuer ainsi à exprimer les relations de toute espèce qui existent entre les lignes trigonométriques; mais, quelque attrayante que soit cette étude, nous dépasserions le but de cet ouvrage si nous donnions trop d'extension à la recherche des formules. Celles qui précèdent suffisent pour faire comprendre ce qui nous reste à dire, et je craindrais qu'un plus grand nombre de combinaisons ne détournât l'esprit du lecteur des principes plus essentiellement utiles dans la pratique.

Construction des tables.

XII.

939. **Tables des lignes trigonométriques**. Nous rappellerons d'abord que l'on est convenu de partager la circonférence du cercle en 360 *degrés*, chaque degré en 60 *minutes*, et chaque minute en 60 *secondes*.

D'après cela, supposons que dans un cercle dont le rayon serait pris pour unité, on soit parvenu à calculer très-exactement le sinus d'une *minute*; on portera le nombre obtenu dans la formule (3), ce qui donnera

$$\cos.\ 1' = \sqrt{R^2 - \sin.^2 1'},$$

et puisque nous avons supposé que le rayon = 1, nous aurons

$$\cos.\ 1' = \sqrt{1 - \sin.^2 1'}.$$

Cette valeur étant calculée, les formules (12) et (13) donneront

$$\sin.\ 2' = 2 \sin.\ 1' \cos.\ 1',$$
$$\cos.\ 2' = \cos.^2 1' - \sin.^2 1'.$$

Faisant ensuite $a = 2'$ et $b = 1'$, les formules (8) et (10) donneront

$$\sin.\ 3' = \sin.\ (2' + 1') = \sin.\ 2' \cos.\ 1' + \sin.\ 1' \cos.\ 2',$$
$$\cos.\ 3' = \cos.\ (2' + 1') = \cos.\ 2' \cos.\ 1' - \sin.\ 2' \sin.\ 1'.$$

Les formules (12 et (13) donneront ensuite

$$\sin.\ 4' = \sin.\ (2 \times 2') = 2 \sin.\ 2' \cos.\ 2',$$
$$\cos.\ 4' = \cos.\ (2 \times 2') = \cos.^2 2' - \sin.^2 2'.$$

Enfin les formules (8) et (10) donneront

$$\sin.\ 5' = \sin.\ (3' + 2') = \sin.\ 3' \cos.\ 2' + \sin.\ 2' \cos.\ 3',$$
$$\cos.\ 5' = \cos.\ (3' + 2') = \cos.\ 3' \cos.\ 2' - \sin.\ 3' \sin.\ 2',$$

et ainsi de suite.

Lorsque tous les sinus et cosinus seront calculés, les formules (4), (5), (6) et (7) donneront les tangentes, cotangentes, sécantes et cosécantes des arcs correspondants, et tous ces nombres, placés en colonnes, formeront les *tables des lignes trigonométriques.*

On voit donc qu'il suffira de connaître une seule ligne trigonométrique pour être en état de calculer toutes les autres, et que le reste est une affaire de persévérance.

La seule difficulté sera d'obtenir le sinus d'une minute que nous avons supposé connu; or, le sinus d'un arc étant évidemment la moitié de la corde qui sous-tend un arc double, on pourra toujours obtenir un premier sinus en divisant par deux l'une des formules du numéro 904.

Ainsi, par exemple, le côté de l'hexagone ou la corde de 60 degrés étant égale à R, on aura

$$\sin. 30° = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} = 0,50000.$$

Le sinus de 30° étant connu, la formule (3) donne le cosinus de 30°. Les formules (14) et (15) donneront les sinus et cosinus de 15°. Ces dernières lignes étant connues, on emploiera les mêmes formules pour déterminer les sinus et cosinus de 7° 30'. Ensuite on cherchera les sinus et cosinus de 3° 45', et ainsi de suite. Or, en calculant toujours ainsi les sinus et cosinus des arcs moitiés, on finira par arriver au sinus de 1' 45",46875; mais lorsque les sinus deviennent très-petits, ils sont sensiblement proportionnels aux arcs correspondants, et comme l'on connaît très exactement tous les arcs de cercle, puisque le nombre π est calculé jusqu'au delà du cent quarantième chiffre décimal, on pourra établir cette proportion

$$\text{arc } 1' 45'',46875 : \text{arc } 1' :: \sin. 1' 45'',46875 : \sin. 1'.$$

L'erreur commise dans ce cas serait tout à fait insignifiante pour la pratique.

Au surplus, les tables trigonométriques sont tellement utiles dans les applications, que les géomètres ont dû chercher les moyens d'en perfectionner la théorie. On a trouvé des formules qui permettent d'accélérer considérablement le travail, et ce qui précède a seulement pour but de faire comprendre comment les lignes trigonométriques peuvent être déduites les unes des autres.

Je renverrai donc aux ouvrages spéciaux pour tous les détails de ces travaux importants, et je me bornerai pour le moment à expliquer la disposition et l'usage des tables.

XIII.

940. **Tables de logarithmes des lignes trigonométriques.** Dans la plus grande partie des applications, on

n'emploie pas les nombres qui expriment les valeurs des lignes trigonométriques ; ces quantités représentant presque toujours les côtés de triangles semblables à ceux que l'on cherche, se combinent dans le calcul par multiplication ou division, et, dans ce cas, il est beaucoup plus simple d'employer leurs logarithmes. Pour éviter alors la double recherche du nombre qui exprime la longueur de la ligne, et du logarithme de ce nombre, on n'écrit ordinairement que le logarithme. Ainsi, par exemple, dans une table usuelle, si l'on jette un coup d'œil sur la colonne en tête de laquelle est placé le mot sinus, on ne trouvera pas les nombres qui expriment les valeurs de ces lignes, mais seulement leurs logarithmes. Il en est de même des cosinus, tangentes et cotangentes.

941. **Disposition des tables.** Lorsque l'on eut calculé les longueurs de tous les sinus et cosinus, depuis 0 jusqu'à 45 degrés, il n'a pas été nécessaire de continuer. En effet, les lignes trigonométriques de tous les arcs au-dessus de 45°, sont évidemment les mêmes que les lignes trigonométriques des arcs au-dessous. Il suffit de se rappeler que le sinus d'un arc est le cosinus de son complément, et que le sinus du complément est égal au cosinus de l'arc.

Cette remarque a fait imaginer une disposition extrêmement ingénieuse. Ainsi, lorsqu'on est arrivé, dans la table, à l'arc de 45 *degrés*, on a rétrogradé, en plaçant au bas des pages les nombres de degrés que l'on avait mis en haut, pour tous les arcs au-dessous de 45 degrés. Il faut donc se rappeler qu'au-dessous de 45°, le nombre de degrés de l'arc dont on cherche le logarithme, est placé en tête de la page, et les minutes dans la première colonne à gauche, et en descendant ; tandis que pour les arcs au-dessus de 45°, le nombre de degrés est placé en

bas de la page, et les minutes dans la dernière colonne à droite et en montant.

Par suite de cette convention, on trouvera le même nombre lorsque l'on cherchera, par exemple, le sinus d'un arc ou le cosinus de son complément; ou bien lorsque l'on cherchera la tangente d'un arc ou la cotangente de son complément.

Ainsi, par exemple, l'arc 37° 18′ ayant pour complément 52° 42′, on trouverait le nombre 9,78246, en cherchant sin. 37° en tête de la page, et les 18′ dans la première colonne à gauche; et l'on trouverait encore le même nombre en cherchant cos. 52 au bas de la page, et 42′ dans la dernière colonne à droite.

942. **Rayon des tables.** Tous les sinus et les cosinus étant plus petits que le rayon, chacune de ces lignes ne peut être exprimée que par une fraction dont le logarithme est toujours négatif. Pour éviter l'embarras qui résulterait pour les calculs d'un si grand nombre de signes—, on a multiplié tous les nombres obtenus par 10 000 000 000, ce qui revient à supposer que le rayon du cercle trigonométrique est égal à 10 000 000 000 d'unités. Par suite de cette convention les sinus et les cosinus des angles employés dans la pratique, ne seront jamais plus petits que l'unité, et leurs logarithmes seront toujours positifs.

Ainsi, lorsqu'une formule de trigonométrie est employée comme faisant partie du langage algébrique, le rayon $= 1$; mais, dans les calculs par logarithmes, le rayon $= 10\,000\,000\,000$, et par conséquent son logarithme $= 10$.

Le rayon des tables est donc un rayon d'une grandeur quelconque, mais que l'on suppose toujours partagé en 10 000 000 000 de parties égales.

Ainsi les nombres qui représentent les lignes trigonométriques ne sont autre chose que les *rapports numéri-*

ques qui existent entre ces lignes et le rayon dont la *longueur absolue* est tout à fait arbitraire.

943. **Tangente de 45°**. Si l'angle XOM, *fig.* 16, vaut 45°, ou un demi-angle droit, le triangle OXU sera isocèle, et l'on aura XU = OX, ou, ce qui revient au même,

$$tang.\ 45° = R$$

d'où $$log.\ tang\ 45° = log.\ R = 10.$$

Par conséquent, toutes les fois qu'un angle ou un arc sera plus grand que 45°, sa tangente sera plus grande que R, et le logarithme de cette tangente sera plus grand que 10.

Il est utile de se rappeler cette remarque, parce que, pour ménager la place dans les tables de logarithmes, on n'écrit pas ordinairement les dizaines d'unités pour les caractéristiques des logarithmes des tangentes au-dessus de 45°, ou des cotangentes au-dessous. Ainsi lorsque l'on trouve dans la table

$$log.\ tang.\ (87°\ 14') = 1,31583,$$

il faut lire $log.\ tang.\ (87°\ 14') = 11,31583.$

Par la même raison on aura

$$log.\ cot.\ (12°\ 18') = 10,66147.$$

Je suppose ici que le lecteur a entre les mains les tables de logarithmes de Lalande, à cinq décimales. S'il veut plus d'exactitude, il prendra les tables de Callet.

944. **Logarithme du sinus du supplément**. Nous avons dit que deux angles ou deux arcs supplémentaires ont le même sinus; par conséquent, pour trouver dans la table le logaritme du sinus d'un angle obtus, il faut d'abord calculer son supplément, ainsi on aura

$$log.\ sin.\ 138° = log.\ sin.\ (180° - 138°) = log.\ sin.\ 42.$$

Calcul des triangles.

XIV.

945. **Théorème.** *Dans tout triangle rectangle, le rayon est au sinus de l'un des angles aigus, comme l'hypoténuse est au côté opposé à cet angle aigu.*

Démonstration. *Fig.* 12. Du point B, comme centre, avec un rayon quelconque BX, que nous pouvons toujours considérer comme le rayon des tables (942), décrivons l'arc XM, et traçons la perpendiculaire MP, nous aurons

$$BM : MP :: BC : CA,$$

qui devient, en adoptant la notation ordinaire (249),

$$R : \sin. B :: a : b.$$

Si nous supposons, ce qui est permis, que l'on remplace la lettre B par C, le côté b devra être remplacé par c, et l'on aura par conséquent

$$R : \sin. C :: a : c.$$

Ainsi le théorème sera exprimé complétement par les deux proportions

(1) $R : \sin. B :: a : b$

(2) $R : \sin. C :: a : c.$

XV.

946. **Théorème.** *Dans tout triangle rectangle le rayon est à la tangente d'un angle aigu, comme le côté adjacent à cet angle, est au côté qui lui est opposé.*

Démonstration. *Fig.* 13. Si nous traçons la perpendiculaire XU, les deux triangles BXU, BAC, seront semblables et l'on aura la proportion

$$BX : XU :: BA : AC,$$

qui devient $R : \text{tang}. B :: c : b;$

remplaçant B par C et b par c, on aura

$$R : \text{tang. } C :: b : c,$$

et le théorème sera exprimé par les proportions

(3) $R : \text{tang. } B :: c : b$

(4) $R : \text{tang. } C :: b : c.$

Calcul des triangles rectangles.

XVI.

947. **Triangles rectangles.** Les deux théorèmes précédents suffisent pour calculer tous les triangles rectangles; pour cela, on choisit dans chaque cas, parmi les formules (1), (2), (3) et (4), la proportion dans laquelle la quantité demandée est la seule inconnue. Nous allons éclaircir cela par quelques développements. Nous rappellerons d'abord que pour déterminer un triangle il faut donner trois de ses parties, parmi lesquelles il doit y avoir au moins un côté (253). Or, dans un triangle rectangle, l'angle A étant toujours connu il ne reste plus que deux données arbitraires, ce qui réduit la question à deux cas principaux, savoir : 1° Lorsqu'on connaît *un angle avec un côté*,

2° . . . . *deux côtés.*

Le premier cas donne lieu à trois problèmes, dans lesquels on a pour données,

1° *Un angle aigu et l'hypoténuse;*

2° *Un angle aigu et le côté opposé;*

3° *Un angle aigu et le côté adjacent.*

Le second cas donne lieu à deux problèmes, dans lesquels les données sont :

1° *L'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit;*

2° *Les deux côtés de l'angle droit.*

Cela fait donc en tout *cinq* problèmes.

XVII.

948. **Premier problème**. *Étant donnés un angle aigu et l'hypoténuse, calculer toutes les autres parties du triangle.*

Nous disposerons les quantités données et les résultats de la manière suivante :

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 90°$.	$C = 51° 18'$.
$B = 38° 42'$.	$b = 5272^m,05$.
$a = 8432^m$.	$c = 6580^m,51$.

Solution. Dans tout calcul de triangle, il faut commencer par les angles; ainsi nous dirons

$$C = 90° - (38° 42') = 51° 18'.$$

Le théorème 945 donne ensuite

$$R : \sin. B :: a : b,$$

qui devient $\quad R : \sin.(38° 42') :: 8432^m : b,$

d'où $$b = \frac{8432 \times \sin.(38° 42')}{R},$$

et par conséquent

$$\log. b = \log. 8432 + \log. \sin. (38° 42') - \log. R.$$

Calcul.

$$\log. 8432 = 3,92593$$
$$\log. \sin. (38° 42') = 9,79605$$
$$13,72198$$
$$\log. R = 10$$
$$\log. b = 3,72198 = \log. 5272,05.$$

Donc $b = 5272^{m},05$.

Le même théorème donne ensuite

$$R : \sin. C :: a : c,$$

qui devient $R : \sin. (51^\circ 18') :: 8432 : c$,

d'où $c = \dfrac{8432 \times \sin. (51^\circ 18')}{R}$,

et par conséquent

$$\log. c = \log. 8432 + \log. \sin. (51^\circ 18') - \log. R.$$

Calcul.

$$\begin{aligned} \log. 8432 &= 3,92593 \\ \log. \sin. (51^\circ 18') &= 9,89233 \\ & 13,81826 \\ \log. R &= 10 \\ \log. c &= 3,81826 = \log. 6580,51. \end{aligned}$$

Donc $c = 6580^{m},51$.

949. **Remarque.** Dans cet exemple et dans ceux qui suivent, les côtés des triangles ont été calculés jusqu'aux centimètres au moyen de la proportion des différences. Mais ce travail peut toujours être évité dans la pratique, en faisant usage des tables de Callet, dans lesquelles les différences sont calculées d'avance.

XVIII.

950. **Deuxième problème.** *Étant donné un angle aigu avec le côté opposé.*

Nous prendrons pour données les parties du triangle précédent, afin que chaque problème puisse servir de vérification à tous les autres.

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 90^\circ$.	$C = 51^\circ\,18'$.
$B = 38^\circ\,42'$.	$a = 8432^m$.
$b = 5272^m,05$.	$c = 6580^m,51$.

Solution. On aura d'abord

$$C = 90^\circ - (38^\circ\,42') = 51^\circ\,18'.$$

Le théorème 945 donnera ensuite

$$R : \sin. B :: a : b,$$

qui devient $$R : \sin. (38^\circ\,42') :: a : 5272,05,$$

d'où $$a = \frac{5272,05 \times R}{\sin. (38^\circ\,42')},$$

et par conséquent

$$\log. a = \log. 5272,05 + \log. R - \log. \sin. (38^\circ\,42').$$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \log. 5272,05 = & 3,72198 \\ \log. R = & 10 \\ \hline & 13,72198 \\ \log. \sin. (38^\circ\,42') = & 9,79605 \\ \hline \log. a = & 3,92593 = \log. 8432 \end{array}$$

Donc $a = 8432$ *mètres*.

On calculera c en opérant comme pour le problème précédent, ou bien on emploiera l'une des proportions données par le théorème 945.

XIX.

951. **Troisième problème.** *Étant donnés un angle aigu et le côté adjacent.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 90°$. $B = 38° 42'$. $c = 6580^m,51$.	$C = 51° 18'$. $a = 8432^m$. $b = 5272^m,05$.

Solution. On aura

$$C = 90° - (38° 42') = 51° 18'.$$

On calculera ensuite le côté c avec la proportion (2), et le côté b avec l'une des proportions (1) (3) ou (4).

XX.

952. **Quatrième problème.** *Étant donnés l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 90°$. $a = 8432^m$. $b = 5272^m,05$.	$B = 38° 42'$. $C = 51° 18'$. $c = 6580^m,51$.

Solution. Le théorème 945 donnera d'abord

$$R : \sin. B :: a : b$$

qui devient $R : \sin. B :: 8432 : 5272{,}05,$

d'où $\sin. B = \frac{5272{,}05 \times R}{8432},$

et par conséquent

$$\log. \sin. B = \log. 5272{,}05 + \log. R - \log. 8432.$$

Calcul.

$$\begin{aligned}
\log. 5272{,}05 &= \ \ 3{,}72198 \\
\log. R &= 10 \\
&\overline{\ \ 13{,}72198} \\
\log. 8432 &= \ \ 3{,}92593 \\
\log. \sin. B &= \ \ 9{,}79605 = \log. \sin. (38^\circ\, 42')
\end{aligned}$$

Donc $B = 38^\circ\, 42'.$

On fera ensuite

$$C = 90^\circ - (38^\circ\, 42') = 51^\circ\, 18',$$

et l'on calculera c comme dans les problèmes précédents.

XXI.

953. **Cinquième problème**. *Étant donnés les deux côtés de l'angle droit.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 90^\circ.$	$B = 38^\circ\, 42'.$
$b = 5272^m{,}05.$	$C = 51^\circ\, 18'.$
$c = 6580^m{,}51.$	$a = 8432^m.$

Solution. Le théorème 946 donnera

$$R : \text{tang. } B :: c : b,$$

qui devient R : tang. B :: 6580,51 : 5272,05,

d'où $$\text{tang. } B = \frac{5272,05 \times R}{6580,51},$$

et par conséquent

$$\text{log. tang. } B = \text{log. } 5272,05 + \text{log. } R - \text{log. } 6580,51.$$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 5272,05 = & 3,72198 \\ \text{log. } R = & 10 \\ \hline & 13,72198 \\ \text{log. } 6580,51 = & 3,81826 \\ \hline \text{log. tang. } B = & 9,90372 = \text{log. tang.}(38^\circ 42') \end{array}$$

Donc $$B = 38^\circ\, 42'.$$

On fera ensuite

$$C = 90^\circ - (38^\circ\, 42') = 51^\circ\, 18',$$

et l'on calculera l'hypoténuse *a* par l'une des proportions du théorème 945.

XXII.

954. **Théorème**. *Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles.*

Démonstration. *Fig.* 14. Si nous traçons la perpendiculaire CD, nous décomposerons le triangle donné en deux triangles rectangles CDA, CDB; or le théorème 945 appliqué au triangle rectangle CDA donnera

$$R : \text{sin. } CAD :: AC : CD,$$

mais le côté AC n'est autre chose que b, puisqu'il est opposé à l'angle B ; on aura donc

$$R : \sin. A :: b : CD,$$

d'où $$b. \sin. A = R. CD.$$

Le même théorème appliqué au triangle rectangle CDB donnera la proportion

$$R : \sin. CBD :: BC : CD,$$

qui devient $$R : \sin. B :: a : CD,$$

d'où $$R.CD = a. \sin. B ;$$

multipliant cette équation par la précédente, et transformant on obtient la proportion

(5) $$\sin. A : a :: \sin. B : b.$$

En abaissant la perpendiculaire du point B, on aurait

(6) $$\sin. A : a :: \sin. C : c.$$ Enfin,

en abaissant la perpendiculaire du point A, on aurait

(7) $$\sin. B : b :: \sin. C : c.$$

XXIII.

955. **Théorème**. *Dans tout triangle, la somme de deux côtés est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des deux angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.*

Démonstration. La proportion (5) donne

$$a : b :: \sin. A : \sin. B,$$

d'où, en composant,

$$(a + b) : (a - b) :: (\sin. A + \sin. B) : (\sin. A - \sin. B),$$

que l'on peut écrire de la manière suivante

(m) $$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. A - \sin. B}.$$

Mais on peut toujours concevoir deux arcs ou deux angles x et y, dont la somme serait A et la différence B, ce qui donnera

$$x + y = A,$$
$$x - y = B.$$

Ajoutant ces deux équations, on aura

$$2x = A + B, \quad \text{d'où } x = \frac{A+B}{2}.$$

Retranchant au contraire la seconde équation de la première, on obtient

$$2y = A - B, \quad \text{d'où } y = \frac{A-B}{2}.$$

De plus, on aura

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\sin A - \sin. B} = \frac{\sin. (x+y) + \sin. (x-y)}{\sin. (x+y) - \sin. (x-y)};$$

le second membre développé par les formules (8) et (9) du numéro 934, devient

$$\frac{\dfrac{\sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x}{R} + \dfrac{\sin. x \cos. y - \sin. y \cos. x}{R}}{\dfrac{\sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x}{R} - \dfrac{\sin. x \cos. y - \sin. y \cos. x}{R}}$$

ou, après toutes réductions,

$$\frac{\sin. x \cos. y}{\cos. x \sin. y} = \frac{R \sin. x \cos. y}{R \cos. x \sin. y} = \frac{R \sin. x}{\cos. x} \times \frac{\cos. y}{R \sin y} =$$
$$= \frac{R \sin. x}{\cos. x} : \frac{R \sin. y}{\cos. y} = \frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } y}. \qquad (932)$$

On aura par conséquent

$$(n) \qquad \frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. A - \sin. B} = \frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } y}.$$

Remplaçant x et y par leurs valeurs $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et

$\left(\frac{A-B}{2}\right)$, on a l'équation

$$(u) \qquad \frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } y} = \frac{\text{tang. } \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{tang. } \left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

Enfin, multipliant entre elles les trois équations (m), (n), (u), et réduisant, on obtient

$$(8) \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang. } \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{tang. } \left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

Changeant les lettres, on a

$$(9) \qquad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\text{tang. } \left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{tang. } \left(\frac{A-C}{2}\right)},$$

$$(10) \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\text{tang. } \left(\frac{B+C}{2}\right)}{\text{tang. } \left(\frac{B-C}{2}\right)}.$$

XXIV.

956. **Théorème.** *Dans tout triangle on a*

$$\cos. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{R^2 p(p-a)}{bc}}.$$

La lettre p représente le demi-périmètre (897).

Solution. Nous avons trouvé au numéro 936

$$\cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{R^2 + R \cos. a}{2}}.$$

Remplaçant a par A, ce qui est permis, nous aurons

$$(m) \qquad \cos.\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{R^2+R\cos.A}{2}}.$$

Mais le théorème du numéro 704 étant appliqué au triangle BAC, *fig.* 14, donne

$$(n) \qquad a^2=b^2+c^2-2cx.$$

Le théorème 945 étant appliqué au triangle rectangle CAD, donne R : sin. ACD :: AC : AD,

qui devient R : sin ACD :: b : x,

d'où $$x=\frac{b.\sin.ACD}{R};$$

mais l'angle ACD étant le complément de l'angle A, on a

$$\sin.ACD=\cos.A,$$

par conséquent $$x=\frac{b.\cos.A}{R},$$

qui, étant substitué dans l'équation (n), donne

$$a^2=b^2+c^2-\frac{2bc.\cos.A}{R}.$$

Transformant cette dernière équation, on obtient successivement $$\frac{2bc.\cos.A}{R}=b^2+c^2-a^2,$$

$$\cos.A=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{2bc}.$$

Multipliant les deux membres par R, ajoutant R^2 de chaque côté, et divisant par 2, on a

$$\frac{R^2+R\cos.A}{2}=\frac{R^2}{2}+\frac{R^2(b^2+c^2-a^2)}{4bc}=$$

$$=\frac{R^2(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4bc}=\frac{R^2\left[(b+c)^2-a^2\right]}{4bc}=$$

$$=\frac{R^2(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}=\frac{R^2\times 2p\times 2(p-a)}{4bc}=$$

$$=\frac{R^2p\,(p-a)}{bc}.$$

Prenant la racine quarrée, on obtient

$$(u)\qquad \sqrt{\frac{R^2+R\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{R^2p\,(p-a)}{bc}}.$$

Enfin, multipliant par l'équation (m), et réduisant, on a

$$(11)\qquad \cos.\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{R^2p\,(p-a)}{bc}}.$$

Si l'on change les lettres, on obtiendra

$$(12)\qquad \cos.\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{R^2p\,(p-b)}{ac}},$$

$$(13)\qquad \cos.\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{R^2p\,(p-c)}{ab}}.$$

XXV.

957. **Calcul des triangles obliquangles.** Les trois théorèmes précédents suffisent pour calculer tous les triangles, y compris ceux qui sont rectangles; cependant, pour ces derniers, il sera plus simple d'employer les théorèmes 945 et 946 parce que l'un des facteurs étant égal au *rayon*, cela évite la recherche d'un logarithme.

La solution des triangles obliquangles se réduit à trois cas principaux, savoir, lorsque l'on connaît :

1° *Deux angles et un côté ;*

2° *Un angle et deux côtés ;*

3° *Les trois côtés.*

Le premier cas donne lieu à deux problèmes dans lesquels on a pour données :

1° *Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux* ;

2° *Deux angles et le côté qui leur est adjacent.*

Le second cas donne également lieu à deux problèmes dans lesquels les données sont :

1° *Un angle, le côté qui lui est opposé, et l'un des côtés adjacents* ;

2° *Un angle et les deux côtés qui le comprennent.*

Enfin le dernier cas ne donne lieu qu'à un seul problème dans lequel on connaît *les trois côtés.*

Cela fait par conséquent *cinq* problèmes.

XXVI.

958. **Premier Problème**. *Étant donnés deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.*

ANGLES ET COTÉS.	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 43° 35'$. $B = 24° 7'$. $a = 2457^m$.	$C = 112° 18'$, $b = 1456^m,19$. $c = 3297^m,38$.

Solution. La somme des trois angles d'un triangle étant égale à 180 degrés, on aura

$$C = 180° - (A + B) = 180° - (67° 42') = 112° 18'.$$

Le théorème 954 donnera ensuite

$$\sin. A : a :: \sin. B : b, \quad \text{qui devient}$$

$$\sin. (43° 35') : 2457 :: \sin. (24° 7') : b,$$

d'où $b = \frac{2457 \times \sin.\ (24^\circ 7')}{\sin.\ (43^\circ 35')}$,

et par conséquent,

$\log. b = \log. 2457 + \log. \sin. (24^\circ 7') - \log. \sin. (43^\circ 35')$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \log. 2457 = & 3,39041 \\ \log. \sin. (24^\circ 7') = & \underline{9,61129} \\ & 13,00170 \\ \log. \sin. (43^\circ 35') = & \underline{9,83848} \\ \log. b = & 3,16322 = \log. 1456,19 \end{array}$$

Donc $b = 1456^{m},19$.

Pour calculer le côté c, on emploiera la proportion

$\sin. A : a :: \sin. C : c$, qui devient

$\sin. (43^\circ 35') : 2457 :: \sin (112^\circ 18') : c$,

d'où $c = \frac{2457 \times \sin.\ (112^\circ 18')}{\sin.\ (43^\circ 35')}$,

et par conséquent

$log. c = \log. 2457 + \log. \sin. (112^\circ 18') - \log. \sin. (43^\circ 35')$.

Calcul.

On doit se rappeler d'abord que le sinus d'un nombre est le même que celui de son supplément, c'est pourquoi au lieu de chercher le logarithme du sinus de (112° 18'), que l'on ne trouverait pas dans la table, on cherchera celui de 67° 42', ainsi on écrira

$$\begin{array}{rl} \log. 2457 = & 3,39041 \\ \log. \sin. (67^\circ 42') = & \underline{9,96624} = \log. \sin. (112^\circ 18') \\ & 13,35665 \\ \log. \sin. (43^\circ 35') = & \underline{9,83848} \\ \log. c = & 3,51817 = \log. 3297,38. \end{array}$$

Donc $c = 3297^{m},38$.

XXVII.

959. **Deuxième Problème.** *Étant donnés deux angles et le côté qui leur est adjacent.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 43° 35'$.	$C = 112° 18'$.
$B = 24° 7'$.	$a = 2457^m$.
$c = 3297^m,38$.	$b = 1456^m,19$.

Solution. On aura, comme précédemment,
$C = 180° - (A + B) = 180° - (67° 42') = 112° 18'$.
Le théorème 954 donnera ensuite

$$\sin. C : c :: \sin. A : a, \quad \text{qui devient}$$

$$\sin. (112° 18') : 3297,28 :: \sin. (43° 35') : a,$$

d'où

$$a = \frac{3297,38 \times \sin. (43° 35')}{\sin. (112° 18')},$$

et par conséquent

$$\log. a = \log. 3297,38 + \log. \sin. (43° 35') - \log. \sin(112° 18').$$

Calcul.

$$\log. 3297,38 = 3,51817$$
$$\log. \sin. (43° 35') = 9,83848$$
$$13,35665$$
$$\log. \sin. (67° 42') = 9,96624 = \log. \sin. (112° 18')$$
$$\log. a = 3,39041 = \log. 2457.$$

Donc $a = 2457$ *mètres.*

XXVIII.

960. **Troisième Problème**. *Etant donnés un angle, le côté qui lui est opposé, et l'un des côtés adjacents.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$A = 43^\circ\ 35'$. $a = 2457^m$ $b = 1456^m,19$.	$B = 24^\circ\ 7'$. $C = 112^\circ\ 18'$. $c = 3297^m,38$.

Solution. Le théorème 954 donnera la proportion

$$\sin.\ A : a :: \sin.\ B : b,$$

qui devient

$$\sin.\ (43^\circ\ 35') : 2457 :: \sin.\ B : 1456^m,19,$$

d'où $$\sin.\ B = \frac{1456,19 \times \sin.\ (43^\circ\ 35')}{2457},$$

et par conséquent

$$\log.\ \sin.\ B = \log.\ 1456,19 + \log.\ \sin.\ (43^\circ\ 35') - \log.\ 2457.$$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 1456,19 = & 3,16322 \\ \log.\ \sin.\ (43^\circ\ 35') = & \underline{9,83848} \\ & 13,00170 \\ \log.\ 2457 = & \underline{3,39041} \\ \log.\ \sin.\ B = & 9,61129 = \begin{cases} \log.\ \sin.\ (24^\circ\ 7') \\ \log.\ \sin.(155^\circ 53') \end{cases} \end{array}$$

Il semble qu'il y ait ici incertitude puisque le sinus de 24° 7′ convient également à son supplément qui vaut 155° 53′.

Mais le doute cesse aussitôt, parce que si l'angle B était obtus, le côté opposé *b* serait le plus grand des trois côtés du triangle.

Si le côté *a* était plus petit que *b* il y aurait deux solutions, à moins que *a* ne soit plus petit que la perpendiculaire abaissée sur *b*. Dans ce cas, le triangle ne serait pas possible, et l'impossibilité serait indiquée, parce que l'on obtiendrait $\log. \sin. B > 10$,

ce qui donnerait $\sin. B > R$.

Si l'on trouvait $\log. \sin. B = 10$, cela indiquerait que le triangle est rectangle en B.

XXIX.

961. **Quatrième Problème.** *Étant donnés un angle et les deux côtés qui le comprennent.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
C = 112° 18′. a = 2457^{m}. b = 1456^{m},19.	A = 43° 35′. B = 24° 7′. c = 3297^{m},38.

Solution. On a évidemment

$$(a+b) = 2457 + 1456,19 = 3913,19$$
$$(a-b) = 2457 - 1456,19 = 1000,81,$$

on a de plus

$$A + B = 180° - C = 180° - (112° 18') = 67° 42',$$

d'où l'on conclut

$$(m) \qquad \frac{A+B}{2} = 33° 51'.$$

Le théorème 955 donne la proportion

$$(a+b) : (a-b) :: \text{tang.}\left(\frac{A+B}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

qui devient

$$3913{,}19 : 1000{,}81 :: \text{tang.}\,(33° 51') : \text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

d'où $\text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1000{,}81 \times \text{tang.}\,(33° 51')}{3913{,}19}$,

et par conséquent

$$\text{log. tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \text{log. } 1000{,}81 + \text{log. tang. } (33° 51') - \text{log. } 3913{,}19.$$

Calcul.

$$\begin{aligned} \text{log. } 1000{,}81 &= 3{,}00035 \\ \text{log. tang. } (33° 51') &= \underline{9{,}82653} \\ & 12{,}82688 \\ \text{log. } 3913{,}19 &= \underline{3{,}59252} \\ \text{log. tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right) &= 9{,}23436 = \text{log. tang. } 9° 44', \end{aligned}$$

on aura par conséquent

$$(n) \qquad \frac{A-B}{2} = 9° 44';$$

ajoutant les deux équations (m) et (n) on a

$$A = 43° 35';$$

retranchant au contraire l'équation (n) de (m) on a

$$B = 24° 7',$$

les angles A et B étant connus on calculera le côté c, par l'une des deux formules (6) ou (7) du théorème 955.

XXX.

962. **Cinquième Problème.** *Étant donnés les trois côtés.*

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
$a = 2457^m$.	$A = 43°\ 35'$.
$b = 1456^m,19$.	$B = 24°\ 7'$.
$c = 3297^m,38$.	$C = 112°\ 18'$.

Solution. On calculera d'abord

$$2p = 2457 + 1456,19 + 3297,38 = 7210,57$$

$$p = \frac{7210,57}{2} = 3605,285$$

$$p - a = 3605,285 - 2457 = 1148,285$$

Le théorème 956 donnera ensuite

$$\cos.\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{R^2.\, p\,(p-a)}{bc}},$$ qui devient

$$\cos.\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{R^2 3605,285 \times 1148,285}{1456,19 \times 3297,38}},$$

et par conséquent

$$\log.\cos.\frac{A}{2} = \frac{\left[\begin{array}{l}\log. R^2 + \log. 3605,285 + \log. 1148,285 \\ \quad - \log\ 1456,19 - \log. 3297,38\end{array}\right]}{2}.$$

Calcul.

$$\log.\ R^2 = 20$$
$$\log.\ 3605,285 = 3,55694$$
$$\log.\ 1148,285 = 3,06005$$
$$26,61699 = 26,61699$$
$$\log.\ 1456,19 = 3,16322$$
$$\log.\ 3297,38 = 3,51817$$
$$6,68139 = 6,68139$$
$$26,61699 - 6,68139 = 19,93560$$

Ainsi on aura

$$\log.\ \cos.\ \frac{A}{2} = \frac{19,93560}{2} = 9,96780 = \log.\ \cos.\ 21^\circ\ 47'\ 30'';$$

donc $\frac{A}{2} = 21^\circ\ 47'\ 30''$,

et par conséquent l'angle $A = 43^\circ\ 35'$.

On pourra calculer de la même manière les angles B et C; mais il sera plus simple d'employer l'une des formules du numéro 954.

Distances inaccessibles.

XXXI.

963. **Considérations générales**. Nous terminerons ce chapitre par l'application des principes précédents à la solution de quelques problèmes qui nous ont déjà occupés; nous avons vu, par exemple, aux numéros 549, 553, etc., comment on peut obtenir la mesure de lignes dont on

ne peut pas approcher ; mais les solutions que nous avons données alors, dépendant de la construction de figures semblables et proportionnelles à celles que l'on cherche, il s'ensuit que l'erreur inévitable résultant de l'imperfection des instruments ou de la maladresse de celui qui les emploie, est nécessairement multipliée par le rapport qui existe entre la figure demandée et celle que l'on construit, tandisque les lignes trigonométriques, calculées d'avance avec une grande exactitude, peuvent être considérées comme les parties homologues des quantités cherchées, et sont par conséquent indépendantes de toute erreur de construction.

XXXII.

964. **Problème**. Fig. 1, Pl. 14. *Calculer la hauteur d'une tour.*

On mesurera d'abord la droite horizontale CA, qui est égale à MN, plus la demi-largeur de la tour.

ANGLES ET COTÉS	
MESURÉS.	CALCULÉS.
Côté CA = 36ᵐ. *Angle* BCA = 52° 43′.	**Côté** BA = 47ᵐ,28.

Solution. Le théorème 946 donne

$$R : \text{tang. } BCA :: CA : BA,$$

qui devient

$$R : \text{tang. } (52^\circ\ 43') :: 36 : BA,$$

d'où

$$BA = \frac{36 \times \text{tang. } (52^\circ\ 43')}{R},$$

et par conséquent

$$\log. BA = \log. 36 + \log. \text{tang. } (52^\circ\ 43') - \log. R.$$

Calcul.

$$\begin{aligned}
\log.\ 36 &= 1{,}55630 \\
\log.\ \text{tang.}\ (52^\circ\ 43') &= 10{,}11842 \\
& \overline{11{,}67472} \\
\log.\ R &= 10 \\
\log.\ BA &= \overline{1{,}67472} = \log.\ 47{,}28
\end{aligned}$$

Donc $BA = 47^m{,}28.$

XXXIII.

965. **Problème.** Fig. 3, Pl. 14. *Calculer la hauteur d'une tour dont on ne peut pas approcher.*

Il faut d'abord mesurer la droite horizontale CB, l'angle ACP et l'angle ABC.

ANGLES ET COTÉS	
MESURÉS.	CALCULÉS.
Côté CB = 21ᵐ. *Angle* ACP = 48°. *Angle* ABC = 36°.	*Angle* BAC = 12°. **Côté** AP = 44ᵐ,12.

Solution. La somme des angles BAC + ABC = ACP, d'où $BAC = ACP - ABC = 48^\circ - 36^\circ = 12^\circ$.

Mais le théorème 954 donne la proportion

$$R : \sin.\ ACP :: AC : AP.$$

Le théorème 954 donne ensuite

$$\sin.\ BAC : CB :: \sin ABC : AC.$$

Multipliant la première proportion par la seconde, et réduisant, on obtient

$$R.\ \sin.\ BAC : CB \sin.\ ACP :: \sin.\ ABC : AP,$$

qui devient

$$R \times \sin.\ 12^\circ : 21 \times \sin.\ 48^\circ :: \sin.\ 36^\circ : AP, \text{ d'où}$$

$$(m) \qquad AP = \frac{21 \times \sin.\ 48^\circ \times \sin.\ 36^\circ}{R \times \sin.\ 12^\circ},$$

et par conséquent

$$\log.\ AP = \begin{bmatrix} \log.\ 21 + \log.\ \sin.\ 48^\circ + \log.\ \sin.\ 36^\circ \\ - \log.\ R - \log.\ \sin.\ 12^\circ. \end{bmatrix}$$

Calcul.

$$\begin{array}{rll}
\log.\ 21 = & 1{,}32222 & \\
\log.\ \sin.\ 48^\circ = & 9{,}87107 & \\
\log.\ \sin.\ 36^\circ = & 9{,}76922 & \\
\hline
 & 20{,}96251 & = 20{,}96251 \\
\log.\ R = & 10 & \\
\log.\ \sin.\ 12^\circ = & 9{,}31788 & \\
\hline
 & 19{,}31788 & = 19{,}31788 \\
\hline
\log.\ AP & & = 1{,}64463 = \log.\ 44{,}12
\end{array}$$

Donc $AP = 44^m,12.$

XXXIV.

966. **Problème.** Fig. 4, Pl. 14. *Calculer la largeur d'une rivière.*

Il faut mesurer d'abord la base BD, puis les trois angles ABD, CBD, CDB.

ANGLES ET COTÉS	
MESURÉS.	CALCULÉS.
Côté BD = 60m.	*Angle* A = 49°.
Angle ABD = 59°.	*Côté* AD = 68m,14.
Angle CBD = 32°.	*Angle* BCD = 76°.
Angle CDB = 72°.	*Côté* CD = 32m,77.
	Côté AC = 35m,37.

Solution. On a l'angle

$$A = 180° - (ABD + CDB) = 180° - (59° + 72°) =$$
$$= 180° - 131° = 49°.$$

Le théorème 954 donnera la proportion

$$\sin.\ A : BD :: \sin.\ ABD : AD,$$

qui devient, $\sin.\ 49° : 60 :: \sin.\ 59 : AD$,

d'où
$$AD = \frac{60 \times \sin.\ 59°}{\sin.\ 49°},$$

et par conséquent

$$\log.\ AD = \log.\ 60 + \log.\ \sin.\ 59° - \log.\ \sin.\ 49°.$$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 60 = & 1,77815 \\ \log.\ \sin.\ 59° = & 9,93307 \\ \hline & 11,71122 \\ \log.\ \sin.\ 49° = & 9,87778 \\ \hline \log.\ AD = & 1,83344 = \log.\ 68,14. \end{array}$$

Donc $AD = 68^m,14.$

On aura ensuite l'angle

$$BCD = 180^\circ - (CBD + CDB) = 180^\circ - (32^\circ + 72^\circ) =$$
$$= 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ.$$

Mais le théorème 954 donne la proportion

$$\text{sin. } BCD : BD :: \text{sin. } CBD : CD,$$

qui devient, $\text{sin. } 76^\circ : 60 :: \text{sin. } 32^\circ : CD,$

d'où $$CD = \frac{60 \times \text{sin. } 32^\circ}{\text{sin. } 76},$$

et par conséquent

$$\text{log. } CD = \text{log. } 60 + \text{log. sin. } 32^\circ - \text{log. sin. } 76^\circ$$

Calcul.

$$\text{log. } 60 = 1,77815$$
$$\text{log. sin. } 32^\circ = 9,72421$$
$$11,50236$$
$$\text{log. sin. } 76^\circ = 9,98690$$
$$\text{log. } CD = 1,51546 = \text{log. } 32,77.$$

Donc $CD = 32^m,77,$

et par conséquent

$$AC = AD - CD = 68^m,14 - 32^m,77 = 35^m,37.$$

XXXV.

967. **Problème**. Fig. 5, Pl. 14. *Calculer la distance de deux points* D *et* C, *dont on ne peut approcher.*

Il faut d'abord mesurer avec beaucoup de soin une base AB et les quatre angles DAB, CAB, DBA, CBA.

ANGLES ET COTÉS	
DONNÉS.	CALCULÉS.
Côté AB = 1728^m.	*Angle* ADB = 35°.
Angle DAB = 106°.	*Côté* DB = 2895^m,94.
Angle CAB = 48°.	*Angle* ACB = 40°.
Angle DBA = 39°.	*Côté* CB = 1997^m,73.
Angle CBA = 92°.	*Angle* DBC = 53°.
	Angle DCB = 83° 43′ 22″
	Côté DC = 2326^m,74.

Solution. On a évidemment l'angle
ADB = 180° — (DAB + DBA) = 180° — (106° + 39°) = 35°.

Le théorème 954 donne la proportion

sin. ADB : AB :: sin. DAB : DB,

qui devient, sin. 35° : 1728 :: sin. 106° : DB,

d'où $$\text{DB} = \frac{1728 \times \text{sin. } 106}{\text{sin. } 35°},$$

et par conséquent

log. DB = log. 1728 + log. sin. 106° — log. sin. 35°.

Calcul.

log. 1728 = 3,23754
log. sin. 74° = 9,98284 = log. sin. 106° (944

13,22038
log. sin. 35 = 9,75859

log. DB = 3,46179 = log. 2895,94.

Ainsi DB = 2895^m,94.

On a ensuite l'angle
ACB = 180° — (CAB + CBA) = 180° — (48° + 92°) = 40°.

Le théorème 954 donne la proportion

$$\sin.ACB : AB :: \sin.CAB : CB,$$

qui devient, $\sin.40^\circ : 1728 :: \sin.48^\circ : CB$,

d'où $$CB = \frac{1728 \times \sin 48^\circ}{\sin.40^\circ},$$

et par conséquent

$$\log.CB = \log.1728 + \log.\sin.48^\circ - \log.\sin.40^\circ.$$

Calcul.

$$\log.1728 = 3,23754$$
$$\log.\sin.48^\circ = 9,87107$$
$$13,10861$$
$$\log.\sin.40^\circ = 9,80807$$
$$\log.CB = 3,30054 = \log.1997,73.$$

Donc $CB = 1997^m,73.$

On a l'angle $DBC = CBA - DBA = 92^\circ - 39^\circ = 53^\circ$.

Par conséquent on aura

$$DCB + CDB = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ,$$ d'où

(m) $$\frac{DCB + CDB}{2} = 63^\circ\ 30'.$$

Le théorème 955 donne la proportion

$$(DB+CB) : (DB-CB) :: \text{tang.}\left(\frac{DCB+CDB}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{DCB-CDB}{2}\right),$$

Remplaçant chaque terme par sa valeur, on a

$$4893,67 : 898,21 :: \text{tang.}(63^\circ\ 30') : \text{tang.}\left(\frac{DCB-CDB}{2}\right),$$

d'où $$\text{tang.}\left(\frac{DCB - CDB}{2}\right) = \frac{898,21 \times \text{tang.}(63^\circ\ 30')}{4893,67},$$

et par conséquent $\log.\text{tang.}\left(\frac{DCB - CDB}{2}\right) =$

$$= \log.898,21 + \log.\text{tang.}(63^\circ\ 30') - \log.4893,67.$$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 898{,}21 = & 2{,}95338 \\ \log.\ \text{tang}.\ 63^\circ\ 30' = & 10{,}30226 \\ \hline & 13{,}25564 \\ \log.\ 4893{,}67 = & 3{,}68963 \\ \hline \end{array} \qquad (943)$$

$$\log.\ \text{tang}.\left(\frac{\text{DCB}-\text{CDB}}{2}\right) = 9{,}56601 = \log.\text{tang}.(20^\circ 13' 22'')$$

On a par conséquent

$$(n) \qquad \frac{\text{DCB}-\text{CDB}}{2} = 20^\circ\ 13'\ 22''.$$

Ajoutant les équations (m) et (n), on obtient

$$\text{DCB} = 83^\circ\ 43'\ 22''.$$

Mais le théorème 954 donne la proportion

$$\sin.\ \text{DCB} : \text{DB} :: \sin.\text{DBC} : \text{DC}, \text{ qui devient}$$

$$\sin.\ (83^\circ\ 43'\ 22'') : 2895{,}94 :: \sin.\ 53^\circ : \text{DC},$$

d'où
$$\text{DC} = \frac{2895{,}94 \times \sin.\ 53^\circ}{\sin.\ (83^\circ\ 43'\ 22'')},$$

et par conséquent

$$\log.\text{DC} = \log.2895{,}94 + \log.\sin.53^\circ - \log.\sin.(83^\circ 43' 22'').$$

Calcul.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 2895{,}94 = & 3{,}46179 \\ \log.\ \sin.\ 53^\circ = & 9{,}90235 \\ \hline & 13{,}36414 \\ \log.\sin.(83^\circ 43' 22'') = & 9{,}99739 \\ \hline \log.\ \text{DC} = & 3{,}36675 = \log.\ 2326{,}74. \end{array}$$

Ainsi on aura $\quad \text{DC} = 2326^{\text{m}},74.$

Calcul de surfaces.

XXXVI.

968. **Problème**. Fig. 17, Pl. 24. *Le côté* AB *est égal à* 36 *degrés, le côté* AC = 29 *mètres, et l'angle* CAB *vaut* 62 *degrés. On demande la surface du triangle.*

Solution. On aura

$$(1) \qquad S = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{36 \times CD}{2} = 18 \times CD;$$

mais le théorème 945 donne la proportion

$$R : \sin. A :: AC : CD,$$

qui devient $\quad R : \sin. 62^\circ :: 29 : CD, \quad$ d'où

$$(2) \qquad CD = \frac{29 \times \sin. 62^\circ}{R}.$$

Multipliant l'équation (1) par (2), et réduisant, on obtient

$$S = \frac{18 \times 29 \sin. 62^\circ}{R},$$

d'où, $\log. S = \log. 18 + \log. 29 + \log. \sin. 62^\circ - \log. R$

Effectuant les calculs, on trouvera

$$S = 460^{mq},89.$$

969. **Corollaire** I. Si l'on exprime les deux côtés d'un triangle par b et par c, et l'angle compris par A, on trouvera, en raisonnant comme ci-dessus,

$$S = \frac{bc \sin. A}{2R} = \frac{bc \sin. A}{2}.$$

On sous-entend souvent le facteur R, jusqu'au moment où l'on fait le calcul par logarithme (942).

970. **Cor**. II. Si le triangle est isocèle, on aura

$$S = \frac{b^2 \sin. A}{2}.$$

Dans cette formule, b est le côté oblique du triangle.

971. **Cor.** III. Tout parallélogramme étant égal à deux triangles égaux, on aura pour la surface

$$S = bc \sin. A.$$

972. **Cor.** IV. En exprimant par R le rayon du cercle circonscrit à un polygone régulier, chacun des triangles isocèles qui composent la surface sera

$$\frac{R^2 \sin. A}{2},$$

si l'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, on aura

$$Surf. = \frac{nR^2 \sin. A}{2}.$$

Ainsi, par exemple, dans un polygone de 13 côtés, l'angle au centre $= \frac{360}{13} = 27° 41' 32''$, et l'on aura par conséquent

$$Surf. = \frac{nR^2 \sin. (27° 41' 32'')}{2}.$$

XXXVIII.

973. **Problème**. *Fig.* 18. *Le rayon d'un cercle vaut* 18 *mètres. On demande la surface du segment compris entre l'arc de* 48° *et sa corde.*

Solution On sait que la surface du secteur est à celle du cercle comme l'arc est à la circonférence entière. On aura donc $Sect.$ OABC : πR^2 :: 48 : 360,

d'où $Sect.\ OABC = \frac{48\pi R^2}{360} = 135^{mq},71.$

La formule du numéro 971 donne

$$triangle\ OAC = \frac{R^2 \sin. 48°}{2} = 120^{mq},39.$$

On aura donc $Seg.$ ABCD = $sect.$ OABC — $tri.$ OAC = = $135^{mq},71 - 120^{mq},39 = 15^{mq},32.$

974. **Corollaire**. Si l'on exprime par a le nombre de degrés de l'arc, on aura *Sect.* : πR^2 :: a : 360,

d'où $$Secteur = \frac{\pi R^2 a}{360}.$$

On aura ensuite (971) $Tri. = \frac{R^2 \sin. a}{2}$.

Retranchant cette équation de la précédente, on obtient

$$Segment = \frac{\pi R^2 a}{360} - \frac{R^2 \sin. a}{2} = \frac{R^2 (\pi a - 180. \sin. a)}{360}.$$

FIN DE LA GÉOMÉTRIE PLANE.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

POSITION RELATIVE DES LIGNES ET COMPARAISON DES FIGURES.

LIVRE DEUXIÈME.

LIGNES PROPORTIONNELLES ET FIGURES SEMBLABLES.

LIVRE TROISIÈME.

MESURE DE L'ÉTENDUE.

LIVRE QUATRIÈME.

APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE.

FIN DE LA TABLE.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
rue Racine, 28, près de l'Odéon.

